科普专项资助

新体验科普书系

脑洞大开的微积分

刘祺◎著

数学的精髓不在于知识本身，
而在于数学知识中所蕴含的思想方法

远离“数学过敏症”

复印机里的函数
春运中的极限
厨房里的数学模型
股市里的数学视野
大棚里的不定积分
饺子馅里的重积分

化学工业出版社
悦读名品出版公司

脑洞大开的微积分

刘祺 著

化学工业出版社

化学工业出版社

·北 京·

版权信息

书名：脑洞大开的微积分

作者：刘祺

书号：978-7-122-28859-2

出版：化学工业出版社

目录

第1章　缩印需要多少纸

1.1　打印店情景重现

相信你一定在生活中遇到过这样的问题：当自己想查阅某些非常重要的文献资料时，手头却没有，此时便只能去图书馆进行借阅。若想永久保存书中的某一章节，复印或许是个好办法，但是对于某些专业领域的书籍来说，复印不仅浪费纸张，而且影印件也不方便携带。所以生活中常用的方法就是缩印。在这一章里，我们就来探讨一下缩印需要多少张纸的问题。

1.2　打印店中的函数和映射

如果我们使用如图1-1中的印刷设备，为了确保在缩印之后，文字既不变形而且也可以被看清楚，我们可以选择把原书的长和宽都缩短一半，再印刷在和原书一样大小的纸张上。由此我们可以轻松地计算出在一张纸的一面上可以印刷原书4页的内容，那么如果我们采用双面印刷的话，在同一张纸上就可以印刷原书8页的内容，两张纸上就可以印刷原书16页的内容，三张纸上就可以印刷原书24页的内容……

图1-1　打印机

由此，我们归纳出下列式子：

可以印刷的原书页数＝用于缩印的纸张数×8

利用等式的性质，我们可以在等式两侧同时除以8，于是就得到了：

可以印刷的原书页数÷8＝用于缩印的纸张数

经过再次整理，我们就可以得到：

$$缩印用纸数=\frac{需印原书页数}{8}$$

但这个式子存在一个问题：如果有一本100页的书籍需要缩印，那么缩印用纸数即为12.5。出现小数的原因是，缩印所需的最后一张纸的确只用了一半，但在实际生活中，哪怕只用了一半也要按照一整张纸进行计算。那么我们就把上面的式子变为：

$$缩印用纸数量=\left\lceil\frac{需印原书页数}{8}\right\rceil$$

添加在等式右侧的符号“⌈ ⌉”叫向上取整。它的意思是，当用了少于一张的纸时，不管用了这张纸的多少，都要按照一整张计算。当然，你也许会遇到一个慷慨的打印店老板，他说：“既然最后一张没有印满，那么这张纸就不算了。”这时候就有了如下式子：

$$收费纸张数=\left\lfloor\frac{需印原书页数}{8}\right\rfloor$$

添加在等式右侧的符号“⌊ ⌋”叫向下取整。它的意思是，当你非常幸运地遇到了一个慷慨的打印店老板，他会因最后一张纸没有印满，而不向你收取该张纸的费用。

如果我们把上述问题用数学的方法表达，可以写成如下形式：

设：用x表示需印原书页数，y表示缩印用纸数量，f(x)表示用纸的数量和原有页数之间的转换关系，即有：

$$y=f(x) \quad f(x)=\left\lceil \frac{x}{8} \right\rceil$$

当然你也可以把f(x)去掉，写成：

$$y=\left\lceil \frac{x}{8} \right\rceil$$

这里，我们将

$$y=\left\lceil \frac{x}{8} \right\rceil$$

称为映射，f(x)则为函数。缩印一本书具体需要多少张纸是要看原书需要缩印的有多少页，也就是上式中的x，所以x就叫自变量，因为它是可以自由改变的。而代表缩印使用了多少张纸的y虽然也是改变的，但是它是根据x的改变而改变，所以我们把y称为因变量。

细心观察就会发现，如果我们需要缩印的书籍有97页，那么我们需要印13页纸；需要缩印的书籍有98页时，我们还是需要印13页纸。按这一规律推算，当需要缩印的书籍有104页时，我们还是需要印13页纸。也就是说，当需要缩印的书籍的页数在97～104页的时候，我们都需要13页纸来缩印。由此我们可以归纳出：一个自变量所对应的因变量是唯一且明确的，但一个因变量却可以被若干个自变量所对应。这就是函数和映射的性质。

对于像缩印这样的实际问题来说，x必须是正整数。因为想要缩印-5页或复印2.33页都是不可能的。关于x的取值范围，我们可以用一个数学上的专有名词来表示，它就是定义域。对于那些取任何值都可以的事物(比如气温)，我们就说它的定义域是全体实数，对于像缩印的页数这种问题，我们就需要具体问题具体分析。

相应地，既然自变量x是有范围的，那么因变量y也一定是有范围的。我们将因变量的取值范围称为值域。

如果打印店老板说没印满的纸张不收费，而缩印每张纸应付五角钱。由此可知，需要收费的纸张数为：

$$\text{收费纸张数}=\left\lfloor \frac{\text{需印原书页数}}{8} \right\rfloor$$

这次我们用x表示需印原书页数，y表示收费纸张数，f(x)表示收费纸张数和需印原书页数之间的转换关系，可得到：

$$y=f(x) \quad f(x)=\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

这下我们可以算出应为多少张纸付费，接下来只需要计算出应该付多少钱就可以了。

那么有：

应付款＝0.5×收费纸张数

这里设应付款为z，收费纸张数和应付款的对应关系是

$$z=g(y) \quad g(y)=0.5\times y \quad y=f(x) \quad f(x)=\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

y在y＝f(x)这个式子中是根据x的值来变化的，所以它叫做因变量。

但是我们还发现，在z＝g(y)中，z是根据y的变化而变化的。所以，y在y＝f(x)这个式子中是自变量，而在z＝g(y)这个式子中是因变量。所以谁是自变量、谁是因变量并不绝对。

当然，如果你嫌y这个字母多余，你也可以将上述式子写成：

$$z=g(f) \quad g(f)=0.5\times f(x) \quad f(x)=\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

这里将原本的g(y)写成了g(f)的形式，其中，f代表的是f(x)计算的结果。如果你还觉得繁琐，那么更简练的写法是：

$$g(f)=0.5\times f(x) \quad f(x)=\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

对于f(x)来说，

$$f(x)=\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

中，f(x)是函数。然而在g(f)＝0.5×f(x)中，f所处的位置的自变量的位置。那么我们就称这种自变量是不同于因变量的另一个函数的函数[在这里g(*)不仅是一个式子，还是一个函数]叫做复合函数。

我们也可以把上述复合函数化简，使之成为一般函数：用

$$\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

代替上式中的f(x)，用x代替f，可得：

$$g(x)=0.5\times\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

这时，上式中的自变量变成了x，所以g(*)所表示的映射发生了改变。之前当g(f)时，g(*)表示的是收费纸张数和应付款的对应关系。但是，现在由于自变量由f变成了x的缘故，所以g(*)表示的就应该是需印原书页数和应付款的对应关系。

如果有一天，你遇到了一个更慷慨的打印店老板。他说：“不仅没印满的纸张不收费，而且消费超过50元的部分打八折而缩印每张纸仍应付五角钱。”

显然，当我们缩印的消费小于或等于50元时，我们还可以使用之前的式子，即：

$$g(x)=0.5\times\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor$$

但当缩印的消费超过50元时，按照老板的优惠方法，就应该对超过50元的部分打八折。那么超过50元的部分就应写成g(x)-50或者0.5×

$$0.5\times\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor-50$$

-50的形式。对这部分打八折，就用这一部分乘以0.8就可以了，于是就得到了超出50元的部分应付款的算式：[g(x)-50]×0.8，当然也可以写成

$$\left(0.5\times\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor-50\right)\times0.8$$

的形式。

但这只是超出50元的部分优惠后的价钱，我们还没有加上不参与优惠的50元。因此，当消费超过50元时，则有应付款g(x)为：

$$g(x)=50+\left(0.5\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor-50\right)\times0.8$$

-50)×0.8

我们可对上式进行化简：

$$\begin{aligned}g(x)&=50+\left(0.5\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor-50\right)\times0.8\\&=50+0.5\times0.8\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor-50\times0.8\\&=50-40+0.4\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor=10+0.4\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor\end{aligned}$$

综上所述，优惠后的价格为：

$$g(x)=10+0.4\times\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor$$

现在我们需要考虑的就是，当我们缩印的内容为多少页的时候，消费才能比50元多。显然，当我们消费50元的时候，共缩印了100张纸(因为每张纸5角钱)。但是按照老板的计算方法，如果最后一张纸没有印满，就不收费。所以如果想要消费超过50元，就必须印满101张纸，那么为了印满101张纸，我们至少需要缩印808页的书籍。所以，当我们缩印的内容少于808页的时候，并不能享受到打折的优惠；当我们缩印的内容大于等于808页的时候，我们就可以顺利地享受优惠了。

我们将这种分成两部分或者若干部分计算的函数叫做分段函数，用数学语言表达出来是这样的：

$$g(x)=\begin{cases} 0.5\times\left\lfloor\dfrac{x}{8}\right\rfloor & 0<x<808 \quad x\in N^* \\ 10+0.4\times\left\lfloor\dfrac{x}{8}\right\rfloor & x\geqslant 808 \quad x\in N^* \end{cases}$$

现在我们来考虑更普遍的情况。比如复印。或者缩印的比例是3∶1而不是之前的2∶1。这时，我们就不得不考虑，能不能写成一个更有普遍性的式子(函数)来避免每次到打印店都得在复印前按上一通计算器的麻烦了。

1.3　精通多元函数的慷慨老板

现在我们先来寻找一下缩印和复印间的规律。首先，我们可以认为复印是按照1∶1的比例进行的缩印。这样我们就可以套用之前得出的有关缩印的公式了，数学中常常把一个新的事物或未知的问题转换为原有的事物或已知的问题从而解决问题，这种问题转化的思想在数学中，特别是微积分这样的高等数学中尤为重要。

让我们回到一开始的式子：

$$\text{收费纸张数}=\left\lfloor\frac{\text{原有页数}}{8}\right\rfloor$$

回忆一下，这个式子里面的8是怎么计算出来的呢？ 之前我们说过，在纸的一面上，如果是按2∶1的比例缩印，就可以印原书的4页；要是按照3∶1的比例缩印，就可以印原书的9页。但如果是复印，也就是按照1∶1的比例来进行缩印，那么一面纸上只能印1页。因此，一面纸上可以印的原书的页数等于缩印比例的平方。那么，如果为了节约纸张，正反两面都使用的话，一页纸上能印的原书页数就等于缩印比例的平方再乘以2。

综上所述，我们可以把之前的式子改写为：

$$\text{收费纸张数}=\left\lfloor\frac{\text{需印原书页数}}{\text{缩印比例}^2\times 2}\right\rfloor$$

根据已有的经验，不难写出需印原书页数，缩放比例和应付金额之间的对应关系。这时候我们设原有页数为x1，缩印比例为x2，它们与应付金额的对应关系写成$f(x_1,x_2)$。

这里我们要介绍一种新的函数对应关系：多元函数。之前介绍过的函数都是f(x)和g(x)的形式，这种只有一个自变量的函数，我们称其为 一元函数[注1]。但是因为需印原书页数为x_1和缩印比例为x_2之间是没有关系的(需印原书页数取决于我们要缩印什么内容，而缩印比例则是根据个人需求而主观决定的)。那么像这样有不止一个自变量，而且自变量之间是彼此独立且没有明确数学关系的，我们就称其为f(x_1，x_2)这样的多元函数。在一些专业领域内，像x_1和x_2这样的自变量可以被称为自由度。有两个自变量其自由度为2，有三个这样的自变量其自由度为3，以此类推。

综上所述，我们只需要把原来的式子中的x替换成x_1，同时把8替换成$2\times x_{22}$就可以了。当然，原来的一元函数g(x)此时应写成 多元函数[注2]的形式，即f(x_1，x_2)。那么我们就得到了：

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 0.5\times\left\lfloor\dfrac{x_1}{2\times x_2^2}\right\rfloor & 0<\dfrac{x_1}{2\times x_2^2}<101 \quad x_1,x_2\in N^* \\ 10+0.4\times\left\lfloor\dfrac{x_1}{2\times x_2^2}\right\rfloor & \dfrac{x_1}{2\times x_2^2}\geqslant 101 \quad x_1,x_2\in N^* \end{cases}$$

细心的读者可能会发现，之前的0＜x＜808和x≥808都换成

$$0<\frac{x_1}{2\times x_2^2}<101$$

和

$$\frac{x_1}{2\times x_2^2}\geqslant 101$$

，这是因为

$$\frac{x_1}{2\times x_2^2}$$

代表的是应该使用的纸张数。

怎么样？数学是不是并不像想象中那么可怕？ 现在我们已经学会了简单的一元函数和复杂的多元函数。之后我们讨论的话题主要是一元函数，但是多元函数在解决其他的生活问题时也经常用到。从结绳记数法开始，数学便为人类的生活带来了便捷。而生活中的数学，实际上很好玩。

1.4 花哨小店与集合论

我们再来举一个在打印店常见的例子：现在有很多打印店也在出售文具，如图1-2所示，那么这些琳琅满目、种类繁多的文具又是怎样摆放在货架上的呢？

图1-2　琳琅满目的文具

显然，这些文具是按照一定的规律进行收纳和摆放的。比如，我们可以把笔放在一个笔筒里，把本子堆成一摞儿放在一起，把圆规和尺子放在一起。为了更方便顾客的选购，我们也可以把笔进行分类：铅笔可以根据软硬度的不同放在不同的笔筒里面，自动铅笔单独放在一个笔筒里面，钢笔、签字笔、油性笔也要放在不同的笔筒里面。然后再把这些笔筒排列整齐放在一起。本子也可按照大小摞成不同的堆儿，然后再整齐的放在货架上。在数学上，这种收纳和分类的方法称为集合。

把所有文具放在一起，就可以构成一个集合。我们可以根据自己的喜好，给这个集合起个名字。这里我们给它取名为文具集。文具集这三个字的含义就是把打印店或文具店里面所有的文具放在一起。我们可以将所有文具简单地分为笔、本、作图工具和其他。如果我们把文具里的所有笔挑出来，就可以构成一个新的集合，我们给它取名为笔集。

显然，每个集合里面的内容都是一些有共同特点的事物，我们建立集合的标准之一就是：集合中的事物要有明确的共同特点。当然，所谓的共同特点只要能自圆其说就可以了。比如，你也可以把塑料尺和圆珠笔放在一个集合中，因为它们都可以算作塑料制品。而在笔集这个集合中，还可以细分为铅笔、钢笔、圆珠笔……那么也就可以对应铅笔集、钢笔集、圆珠笔集……

对于任意一支笔来说，它都属于笔。如果使用数学的语言进行表达，我们就说这支笔是笔集里的一个元素。那么，任意一支笔都可以被称为元素。拿一根HB铅笔来说我们就可以说HB铅笔是笔集的一个元素，也可以说HB铅笔属于笔集。如果用符号表示即为：

HB铅笔∈笔集

当然，HB铅笔还属于铅笔集，也可以说HB铅笔是铅笔集的一个元素。用符号表示为：

HB铅笔∈铅笔集

如果要表示HB铅笔不属于钢笔集，也就是HB铅笔不是钢笔集的一个元素。用符号表示为：

HB铅笔∉钢笔集

显然，所有的铅笔都是笔。但是铅笔包括很多种，笔也包括好多种。

这时候铅笔就不能按照元素，而是要按照集合进行考虑了。所以，我们认为 铅笔集是笔集的子集[注3]。铅笔集是笔集的子集的含义就是：所有的铅笔都是笔。用符号表示即为：

铅笔集⊆笔集

当然，对于打印店或者文具店来说，一模一样的文具会有很多。如果文具太多，就应该把它们放在库房里面，只留样品放在外面进行展示。集

合也是这样：集合里面的元素就相当于样品，每个集合里面的元素是不重复的。

有时，某些商品非常畅销，以至于脱销了，甚至连样品都卖出去了。那么在商家再次订购这种商品之前，这种商品就处于缺货状态，如图1-3所示。这种缺货状态，也就是“一个都没有”的状态，在数学上被称为空集，符号为∅。

图1-3　缺货状态

在数学上有一个有趣的现象，就是把“什么都没有”也作为一种状态或一个集合来进行考虑。而且任何集合都有可能什么都没有，也都包括“什么都没有”。这有点儿像是“任何数加上零都等于它自己”。所以，空集是任何一个集合的子集。

此外，任何一个集合也应该包括它自己本身。比如“笔集是笔集的子集”，看似很怪异，但其意为“所有笔都是笔”。这显而易见，在逻辑上也是成立的。所以，任何一个集合也是它本身的子集。

那么，为了避免表达的不清楚，我们给出一个“真子集”的概念：如果一个集合属于另一个集合，而且这两个集合不相等，那么这个集合就是另一个集合的真子集。还以铅笔集和笔集为例，因为所有铅笔都是笔，而铅笔不能包括所有的笔(因为还有钢笔、圆珠笔、记号笔、毛笔……)，那么我们就说铅笔集是笔集的真子集，用符号表示为：

铅笔集⊂笔集

需要特别注意的是，在不同的书籍上，使用的符号也不统一。例如，也有使用⊂表示子集，使用⊊表示真子集的情况。这是因为不同的数学家或者编者习惯使用的符号体系不同。为了严谨起见，在证明的时候应该先说明自己使用的 符号体系[注4]。

在专业的数学教材中，对于我们之前学习过的函数是这样定义的：把定义域和值域看成两个非空集合，函数是使得定义域集合中的每一个元素都在值域集合中有唯一一个元素与之对应。我们把这种对应的法则称为映射。

这样，我们就能够把集合的概念通过映射和之前学过的函数的概念紧密的联系起来了。原本枯燥乏味的数学，也能够通过一个生活中常见的实例，生动形象地展示给大家。

1.5　圆珠笔到底是笔还是塑料

看过刚才的实例，你也许会有这样的疑问：圆珠笔到底属于笔还是塑料制品？生活中类似这样的问题还有很多，比如西红柿到底属于水果还是蔬菜？蔬果汁属于饮料还是保健品？

这就是我们经常说的分类交叉。根据不同的分类标准，一个事物可能同时属于不同的分类。为了解决分类交叉的情况，我们可以采用集合的形式来表示。比如，圆珠笔属于笔集，且属于塑料制品集。那么用集合符号表示为：

圆珠笔∈笔集

且

圆珠笔∈塑料制品集

但是这种表示方法显然太啰嗦了。那么我们不妨引入一个新符号：∩，它念做 交集[注5](简称“交”)。它表示的就是“即这样，又那样”的情况。那么，上面的圆珠笔问题就可以写成：

圆珠笔∈笔集∩塑料制品集

再例如，菜市场中有卖鱼的、卖肉的、卖蔬菜的、还有卖干果的，那么我们如何来表示菜市场中的所有商品呢？ 这时，我们再引入一个新的符号：∪，它念做 并集[注6](简称“并”)。并集的意思是：不管集合之间的从属关系，把所有的内容放在一起。就像是菜市场里面的鱼啊、菜啊等商品，它们虽然属于不同的摊位，也可能由不同的商家进行经营，但是它们仍在一个菜市场出售。在数学上，我们要是想表示这种类似菜市场的关系时，就用到了并集。像菜市场的商品用符号就可以这样表示：

水产品集∪肉集∪蔬菜集∪干果集

是不是很简单呢？我们再来看另一种情况：西红柿属于蔬果类，但不属于肉类。我们用数学语言就可以写成：

蔬果集\肉集

这里我们引入了新的符号：\，它念做差集(简称：差)。它用来表示“属于这个集合而不属于那个集合”的情况。需要注意的是，要把“属于的集合”写在符号的左侧，把“不属于的集合”写在符号的右侧。还有一种情况是，菜市场的摊位都正常营业，但干果摊位因为进货的缘故，在这一天暂停营业了。按照差集的概念，我们可以说，菜市场中除了干果摊位都在营业。用符号表示就是：

所有摊位\干果摊位

如果把所有摊位理解为一个集合的话，那么它是包括干果摊位的。根据之前的内容，我们可以把这种关系写成：

干果摊位⊂所有摊位

当出现这种情况时，我们把所有摊位称为全集。把“所有摊位\干果摊位”写成“

$\overline{\text{干果摊位}}$

”，称其为 补集[注7]。

根据前人的大量实践和严谨证明，我们了解到集合间的运算有四条基本规律：

(1)交换律：A∪B＝B∪A　　A∩B＝B∩A

(2)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3)分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) 德摩根律[注8]：

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}\quad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

特别需要注意的是，在集合间的运算的法则中，当括号内、外符号相同时，只有结合律，没有分配律；而在括号内，外符号不同时，只有分配律，没有结合律。

思考题

如图1-4所示，有一圆内嵌正6x边形。其中$x\in N_*$。请用函数表示x与正6x边形与圆半径的平方的比的关系。

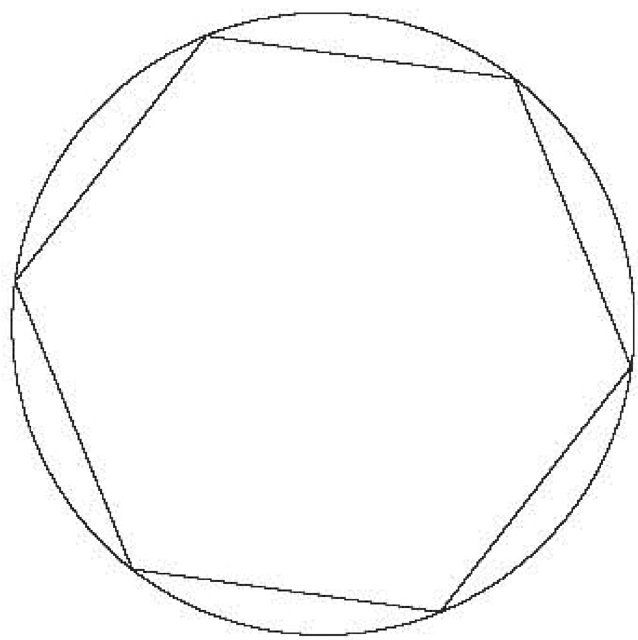


图1-4

数学视野

图1-5中是庄子的画像。庄子是战国时代的著名思想家、哲学家、文学家，也是道家学派的代表人物， 老子[注9]思想的继承和发展者。他的代表作

《庄子·杂篇·天下》也被称为《庄子·天下篇》。其以“天下”为题，共分七段，记录了先秦诸子百家历史渊源、来龙去脉；评价主要思想，并且加以批评的总结性的论文。有民国学者考证，此当为战国时期晚期的庄子后学。在本书中有记载：一尺之棰，日取其半，万世不竭。一尺约为33厘米。我们不妨找一33厘米的纸条来试一试。如果不断地把它截短一半，那么能截多少次呢？ 剩下的纸条的长度又趋近于多少呢？ 试着写出一个关于截短次数和剩余纸条长度的函数式，看看计算的结果和实验的结果到底是不是一样的。

图1-5　庄子画像

添油加醋

假如有五名海盗掠夺到了100 枚金币， 这时为了公平起见，他们决定按照如下思路进行分配：

(1)抽签决定自己的号码。

(2)由1号提出分配方案，然后大家进行表决，当且仅当超过半数的人同意时，才按照他的提案进行分配，否则他将被扔入大海喂鲨鱼。

(3)假如1号死了，再由2号提出分配方案，然后4人进行表决，当且仅当超过半数的人同意时，按照他的提案进行分配，否则他将被扔入大海喂鲨鱼。

(4)以此类推，直到得出最终分配方案。

如果你是1号海盗，你应该提出怎样的分配方案，以使自己的获利最大？

提示：每人20枚金币的分配方法虽然公平，但不能保证自己获利最大，所以想要让自己获利最大，就应该让自己的投票结果正好超过一半。如果我们一上来就假设有五名海盗，这道题目就会无从下手。所以我们需要对这一问题进行简化。假如只有一名海盗，那么他当然希望所有的金币都是自己的啦！这属于不需要分配，就可以占为己有的情况。在这种情况下，这名海盗将得到100枚金币。

把这个模型建得稍微复杂一点儿。假设有两名海盗，如果先分配的1号海盗给2号海盗的金币少于100枚，2号海盗就会不同意他的分配方法，按照规则，1号海盗会被扔到海里喂鲨鱼。对于2号海盗来说，此时就回到了之前的简单模型，即他可以独享100枚金币。想到这里，1号海盗就会为了保命，选择把100枚金币全部给2号海盗。

接着，再把这个模型建得复杂一点儿：如果有三名海盗，那么此时的1号海盗已经知道之前的情况了。如果他被丢到海里喂鲨鱼了，2号海盗就会代替他进行分配，这就意味着如果2号海盗不同意他的分配方法，就一定会为了保命而什么都得不到。这时候，1号海盗就会留给自己99枚金币，而给2号海盗1枚金币。这样一来对2号海盗来说，有总比没有好啊。也许有人会问，3号海盗什么都没得到，肯定不会同意。不过没有关系，算上1号海盗自己的一票和2号海盗的一票，已经二比一了。所以如果有三名海盗的话，1号海盗得99枚金币，2号海盗得1枚金币，3号海盗什么都得不到，是利益最大的分配方法。

然后，我们再将模型建得复杂一点点。如果有4名海盗，此时1号海盗已经熟知了之前的情况：当他给出的方案不能得到三票赞同的话，就意味着2号海盗将取代他的位置，2号海盗得99枚金币，3号海盗得1枚金币，4号海盗什么都得不到。所以，除了自己的一票之外，他还需要两票赞同。显

然，如果给2号海盗的金币少于99枚的话，2号海盗肯定会反对。但是如果只有自己的一票和2号海盗的一票，3号海盗和4号海盗还是会反对。这样就不能满足超过半数赞同的条件了。此时，1号海盗只能选择不分给2号海盗任何金币。去试图征得3号海盗和4号海盗的赞同。那么只有分配给3号海盗2枚金币，4号海盗1枚金币才会赢得他们的赞同。因为如果这时候3号海盗和4号海盗不赞同他的方案的话，自己的利益必然会受到损失。所以当有4名海盗的时候，1号海盗分配给自己97枚金币，2号海盗不分配，3号海盗分配2枚金币，4号海盗分配1枚金币，是对1号海盗利益最大的分配方法。

最后，我们来考虑有五名海盗的情况。这时1号海盗知道了，如果自己的方案不能通过，就意味着2号海盗将分配给自己97枚金币，3号海盗不分配，4号海盗分配2枚金币，5号海盗分配1枚金币。同样的道理，1号海盗放弃拉拢2号海盗。只要给3号海盗1枚金币，3号海盗就会同意之前的分配方法。这时只需要从4号海盗和5号海盗中任选一名支持自己就可以获得三票了。此时，他可以选择给4号海盗3枚金币，或者给5号海盗2枚金币。1号海盗必然选择给5号海盗2枚金币。因为这样能让自己获利更多。所以如果有五名海盗按照之前的规则分配金币的话，1号海盗的最佳分配方案是：自己获得97枚金币，2号海盗和4号海盗不获得金币。3号海盗获得1枚金币，5号海盗获得2枚金币。

这就是数学建模中的经典——博弈模型。

第2章　火车与春运

2.1　从春运说起

在春节期间，你有没有回乡探亲访友呢？ 除了满怀激动与喜悦的心情之外，你有没有思考过火车与春运背后的数学呢？ 列车是什么样的几何图形呢？ 怎样能更清楚地表述行车路线呢？ 在这一节中，让我们共同讨论一系列有关火车与春运的有趣的数学问题。

2.2　从行车轨迹到函数图像

假如在春节期间，我们一同乘坐和谐号列车从北京到上海旅游，已知该次列车是从北京南站开往上海虹桥站，途中要经过天津南、济南西、泰安、滕州东、滁州、南京南、丹阳北、苏州北共十个站点，该次列车的时刻表如表2-1：

表 2-1　北京—上海时刻表

站次	站名	到达	发车
1	北京南	始发站	9:30
2	天津南	10:17	10:19
3	济南西	11:22	11:38
4	泰安	11:55	11:56
5	滕州东	12:27	12:28
6	滁州	13:49	13:51
7	南京南	14:10	14:14
8	丹阳北	14:39	14:41
9	苏州北	15:13	15:15
10	上海虹桥	15:41	终点站

那么，用数学语言又怎样表示列车的行车时刻表呢？我们不妨也来画一张图，如图2-1所示。

图2-1

这样我们就能清楚地表示列车大约在何时到达每一站了。如果我们把这张图画得再复杂些，就能表示像列车在每站停留多长时间，列车运行时的速度等信息了。我们把站名和时间分别写在图2-2中的坐标系的两个坐标轴上。像图2-2这样的规定坐标的方法就叫坐标系，坐标系中由箭头和直线组成的射线是坐标轴。有两个相互垂直的坐标轴的坐标系叫做平面直角坐标系，也叫笛卡尔系。

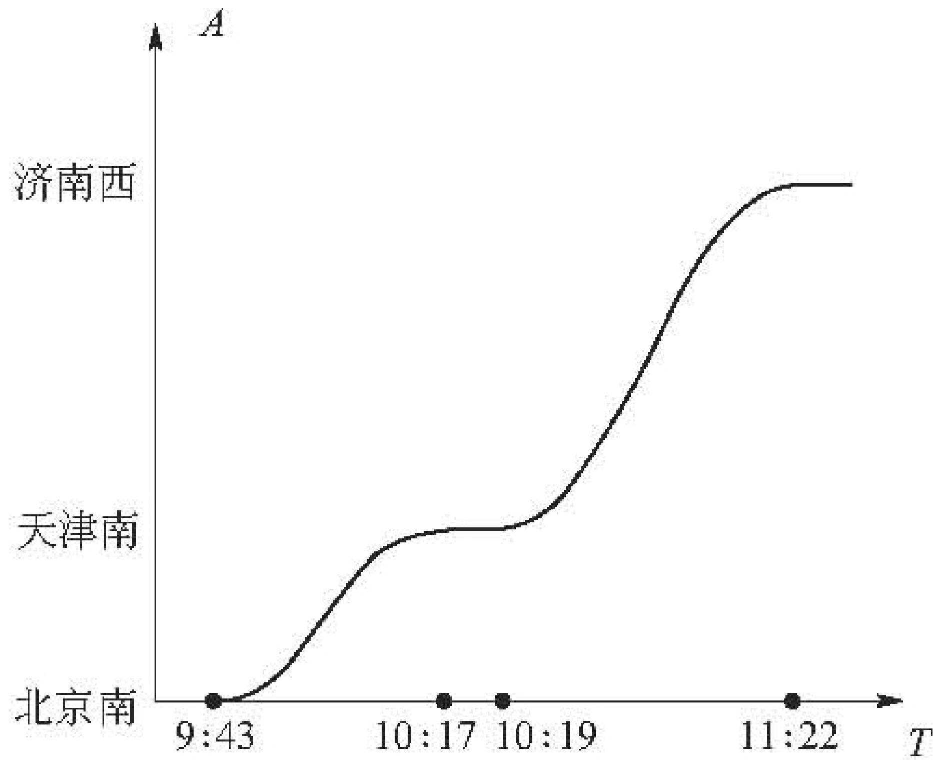


图2-2

坐标轴的箭头旁边标注的字母是坐标轴的名字，A是取英文单词address的首字母、address意为“地址”，这里表示站名；T是取英文单词time的首字母，表示时刻。如果懒得给坐标轴起名，也可以 把竖直方向的坐标轴称为纵轴，用小写字母y表示；把水平方向的坐标轴称为横轴，用小写字母x表示[注10]。

这样，我们很容易就把何时发车、何时到站、停留多长时间这些信息在一张图上表示清楚了。但需要特别注意的是，如何从图中读出列车行驶的速度。

如图2-3所示，假如A、B两地相距5千米，那么我们可以从图中得知，从A地到B地，无论是乘何种交通工具，其速度为10千米/小时。如果用我们函数来表示的话就是：

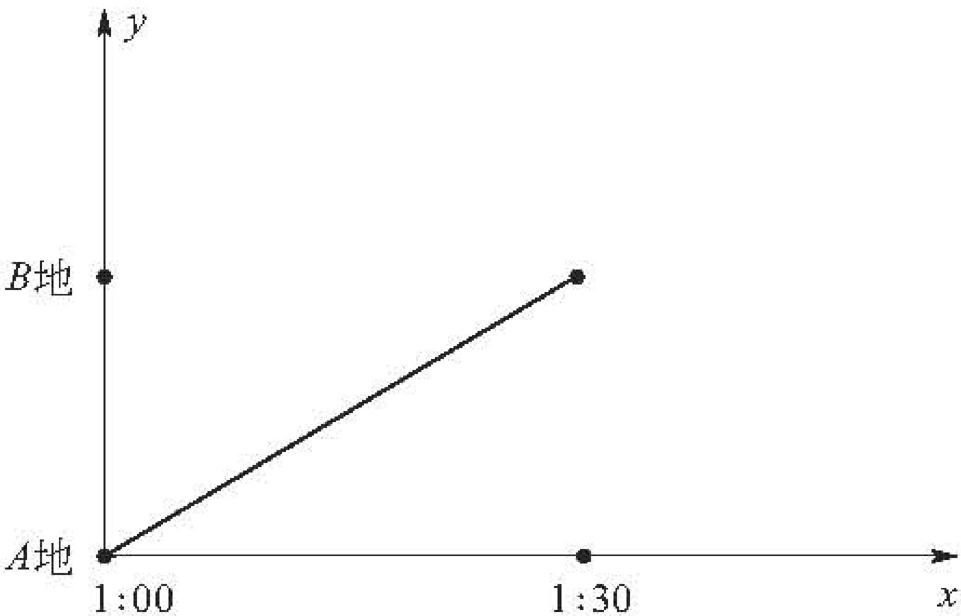


图2-3

y＝10(x-1)[注11]

$\frac{x}{3.6}$

。

经整理后为：

y＝10x-10

我们将形如y＝10x-10这样的式子称为一次函数，可以抽象地写成y＝kx+b，其中k和b满足k∈R且b∈R。例如，在y＝10x-10中，k＝10，b＝-10。这里的k有另一个名字，叫做斜率。在“路程时间”问题中，斜率等于速度的大小。速度越大，斜率越大，在坐标系上画出来的直线越陡。有趣的是，在观察图2-2时我们会发现，列车出站之后和进站之前的图形都不是直线，而是曲线。这是因为斜率和线的陡峭程度有关，之前也说过斜率越大，线就越陡峭。因此，在这张图中，斜率恰好表示的是速度的大小。

那么，对于任意一条直线来说，我们如何求它的斜率呢？

如图2-4中的一条直线，我们已知直线上有A，B两个点及它们的位置。那么我们就可以找到它们在横轴x和纵轴y上所对应的值。利用这个方法，我们就可以得到两组x和y的值，把它们代入y＝kx+b的抽象式中，就可以得到k和b的值。需要注意的是，当A，B两个点在横轴上的值相等时，代入y＝kx+b的抽象式后是求不出k的值的。这时我们认为该直线的斜率不存在，或y＝kx+b不是函数。

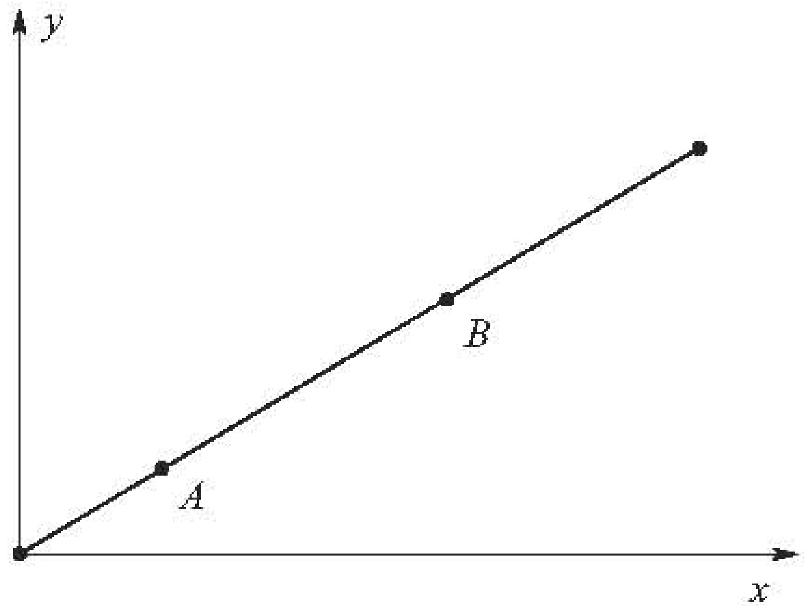


图2-4

但是我们明明是把它们代入了一个表示函数的抽象式中，怎么又说它不是函数了呢？我们不妨把这条直线想象成火车的“路程时间”图，如果两个点在横轴x上的值相等，而纵轴y上的值不等，那么这又意味着什么呢？显然，此时这条直线是垂直于横轴的。既然我们画出了一条最陡峭的直线，那么它是不是表示火车正以很大的速度在行驶呢？事实并不是这样的。如果在“路程时间”图上随意找两个点，我们会发现在同一时间，火车居然处于两个不同的地点。显然，这样的情况在日常生活中是无法遇见的。就目前的学术研究而言，宇宙中最快的速度是真空中的光速。但即使是真空中的光速，也无法让一列火车在同一瞬间出现在两个不同的地点。所以我们说这时斜率不存在。

那我们为什么说y＝kx+b不是函数呢？这也用到了函数和映射的性质。一个自变量对应着的因变量应是唯一而且明确的。但一个因变量却可以被若干个自变量所对应。如果一条直线垂直于横轴，也就说明一个自变量对应了多个因变量，这不满足函数和映射的性质，所以我们就说y＝kx+b不是函数。

现在我们已经知道，已知两点可以求出直线的斜率，进而求出“路程时间”图里，列车在行驶过程中的速度，但是这只对匀速运动的列车有意义。对于列车的变速运动，我们没有办法求出它的瞬时速度吗？当然，我们有办法求出行驶中的列车的瞬时速度。我们可以把列车的运动分为变速和匀速两种行驶状态。对于匀速行驶，我们自然可以用之前的方法求出列车的瞬时速度，因为当列车匀速行驶时，它的瞬时速度就等于平均速度。剩下的就只有如何求出列车在变速行驶过程中每一时刻的速度了。首先，列车的运动是连续的。在日常生活中，列车不可能在从北京开往天津的途中，一下子跳到徐州火车站。而且，对于大多数物体的常规运动，我们都可以认为它的“路程时间”图像是连续的。因为只有在图像是连续的时候，我们才有可能使用下面的方法来求出它在任意时刻的瞬时速度。

既然根据图2-4我们能够求出一个和图像吻合的函数，那么对像图2-5中那样的不规则曲线，我们也一定能求出一个和它吻合的函数。找出能与曲线吻合的函数的过程叫做拟合。关于拟合，我们将在第5章介绍。

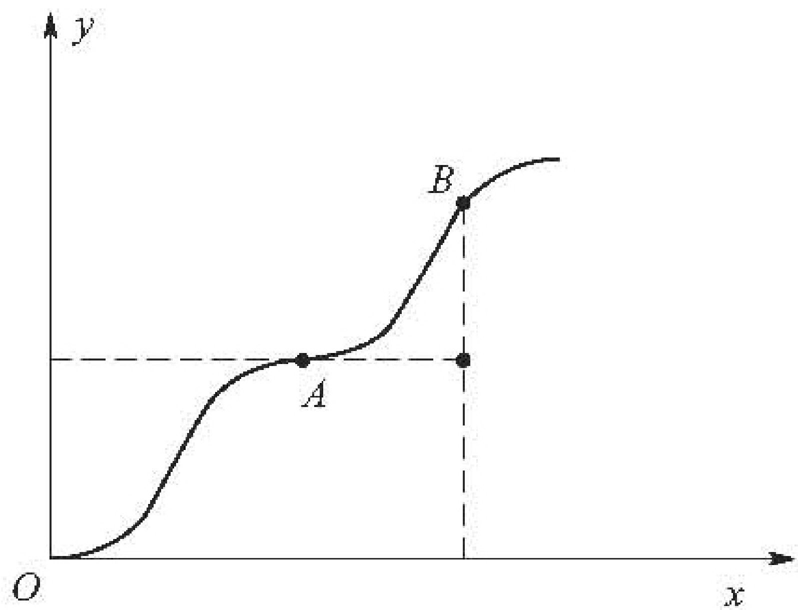


图2-5

既然我们已经知道f(x)的图像了，那么如何求火车的瞬时速度呢？我们可以把这一过程理解为求火车在一瞬间走过的距离。在极短的时间内，物体的速度被视为没有改变，用物理学家的话说是：“在如此短的时间之内，速度没有来得及产生可以被观察到的变化。”所以我们就认为，在某一小段时间内，火车在做匀速直线运动。

现在我们知道，在某一小段时间里，火车是在做匀速直线运动。而这“一小段时间”，就要用一种新的符号来表示：

$$\lim_{time \to 0}$$

这里的time是时间的意思，如果你不习惯使用英文表示也可以写成：：

$$\lim_{时间 \to 0}$$

而在这一符号中，lim是取极限的意思，time→0(时间→0)是指时间趋近于0。因为一瞬间就很接近于0，但又不是0，所以数学家就特意发明了这种符号来表示特别类似、逐步趋近但又并不相同的数量概念。

综上所述，首先我们知道时刻和火车行进的关系(映射)是f(x)。接下来，我们又知道在一瞬间中，火车是在做匀速直线运动。如果在一瞬间开始计时的时刻是时刻x_0且停止计时的时刻是时刻x，我们就得到了“一瞬间”的另一种表示方式：$x-x_0$。既然“一瞬间”可以用

$$\lim_{time \to 0}$$

表示，而且这里的time就是$x-x_0$，那么我们为什么不用

$$\lim_{x-x_0 \to 0}$$

表示呢？当然可以，但我们还可以用更简明扼要的 表示方式：注12

$$\lim_{x \to x_0}$$

物体在做匀速直线运动时，任意时刻的瞬时速度是距离÷时间或

$$\frac{距离}{时间}$$

而在变速运动过程中，某一瞬间物体的瞬时速度则可以写成

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

为了简化后续计算我们对

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

这个式子进行整理。我们用Δx表示x-x_0，于是

$$\lim_{x \to x_0}$$

就可以写成

$$\lim_{\Delta x \to 0}$$

同样地，x可以表示成x_0+Δx，于是f(x)＝f(x_0+Δx)。则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

但这似乎并没有简化太多，所以我们引入一种新的符号——f′ (x_0)，

令

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

这样一来，不仅我们书写的内容少了许多，而且在f′ (x_0)中永远有Δx→0，这样我们就不用每次都考虑“到底是什么趋近于什么”了，从而节约了一个变量。这显然使得我们解决问题的效率提高了。而f′ (x_0)就是我们常说的导数。

关于为什么用在函数映射符号上加一撇来表示导数，还有一个有趣的故事。众所周知，微积分是由牛顿和莱布尼茨创立的数学分支。最早牛顿是用

$$\dot{f}$$

这种在字母f上画点的方式来表示导数。但后来人们发现，这种表示方法并不方便，且在手稿中非常难以辨认。而我们今天所使用的大多数表示微积分的数学符号都是牛顿的好友，也是另一位微积分的创始人—— 莱布尼茨[注13]发明的。

但是莱布尼茨发明的导数符号是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

而非一个撇。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

这种表达形式在很多文献中都能看到。在1706年之前，也有一些科学家，比如对概率学贡献极大的伯努利就曾经用大写字母D表示导数，而这种表示方式也不是很方便。

到了1797年，拉格朗日觉得莱布尼茨表示导数的方法还是太麻烦了，这可能是因为莱布尼茨的符号很难直接表示出到底是哪个函数在参与导数运算。所以，拉格朗日就用在函数上加一个撇的形式来表示导数。而拉格朗日和莱布尼茨使用的导数符号都沿用至今。

言归正传，如果一列火车与始发站之间距离是f(x)，那么这列火车在任意时刻的瞬时速度便是f′(x)。

2.3　火车与对称

图2-6中是一列火车车头的照片和它正面的示意图。将火车的正面示意图从中间对折后，其左右两侧能够相互重合。如果将一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，我们则称其为 轴对称[注14]图形。而那条直线则被称为对称轴。对于 正方形、长方形[注15]、圆形和椭圆形都是轴对称图形。它们至少有一条对称轴，像圆这样的图形则有无数条对称轴。

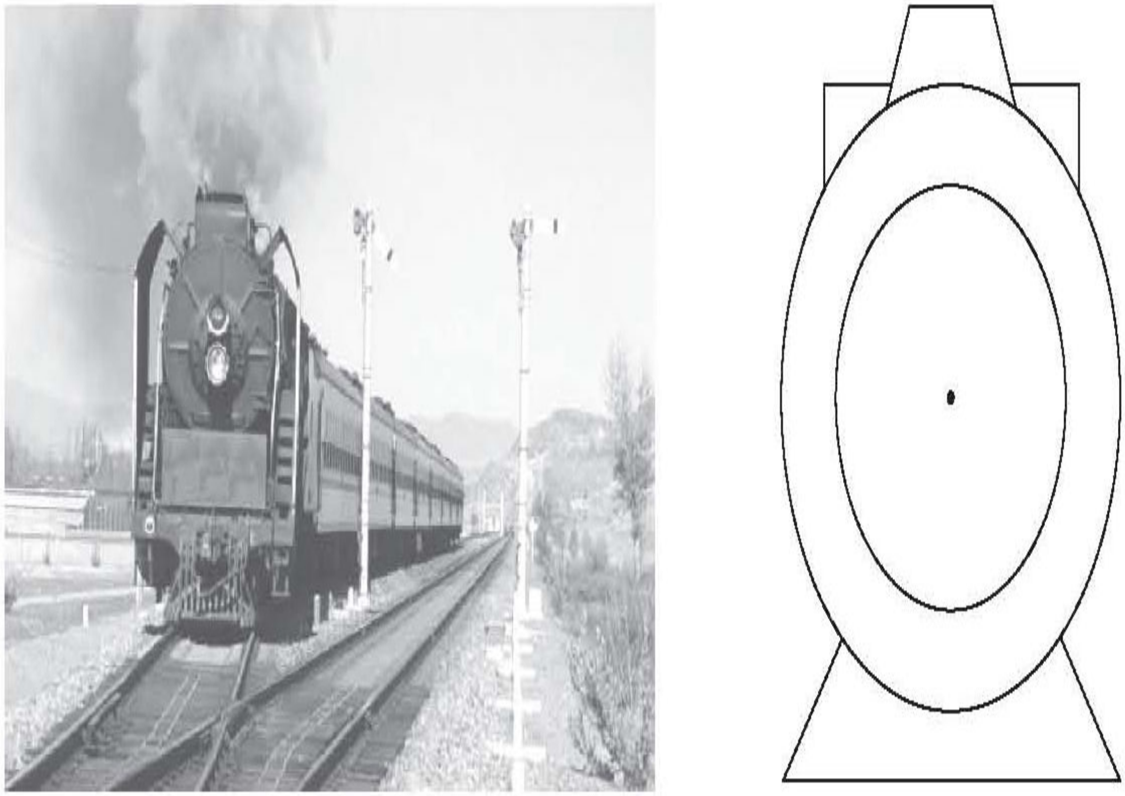


图2-6

图2-7中的图形是 菱形注16，它的两条对称轴已在图中标出。如果将其旋转180度，会发现它与旋转前完全重合。像这样的，将某个图形绕某一个点旋转180度，如果旋转后的图形能与旋转前的图形重合，那该图形即为中心对称图形而那个点就是对称中心。显然，在一个中心对称图形中，对称点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分。

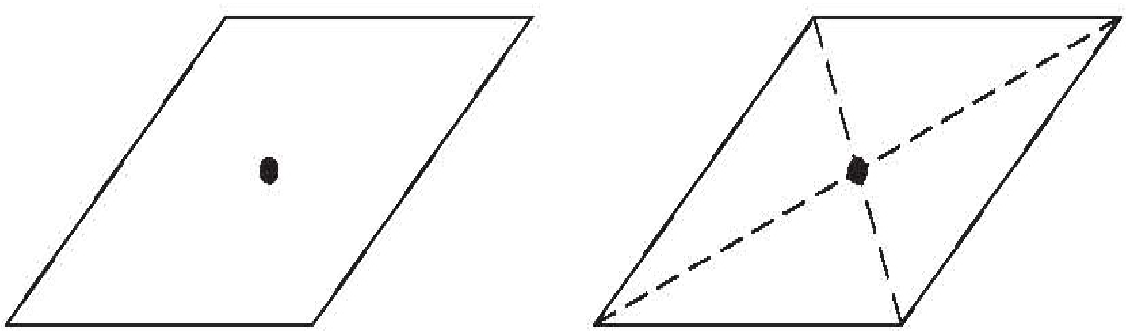


图2-7

之前已经介绍过，函数是有图像的。那么，这些图像是否具有对称或翻转的性质呢？答案是肯定的。比如，$y = x_2$和$y = x_3$这两个函数的图像都是对称的，如图2-8所示。我们将像$y = x_2$这样，图像关于y轴对称的函数称为偶函数。而将像$y = x_3$这样，图像关于坐标原点成中心对称的函数称为奇函数。在后续章节中，我们经常利用对称性，对复杂的计算进行简化。

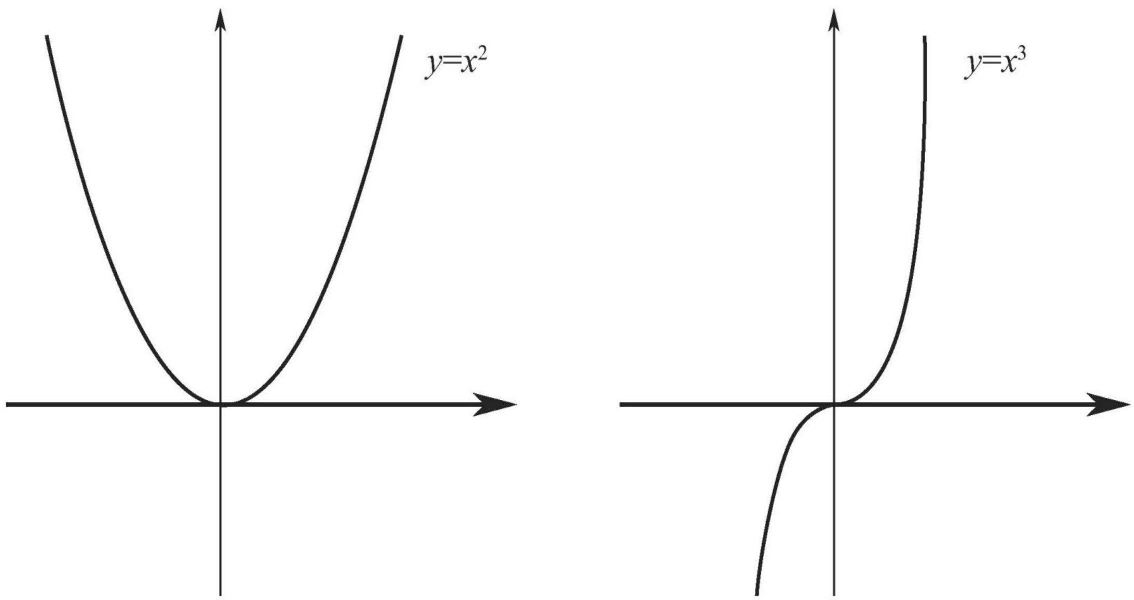


图2-8

仔细观察后我们就会发现，对函数来说，其在横轴(x轴)的负半轴一侧的图像和在正半轴一侧的图像有如下关系(假设$x>0$)：

偶函数：$f(-x)=f(x)$奇函数：$f(-x)=-f(x)$

换句话说，如果有一函数的图像关于纵轴对称，那么我们就可以利用$f(-x)=f(x)$来表示。同样地，如果有一函数的图形关于原点对称，便可以用$f(-x)=-f(x)$来表示。

2.4　数列的极限

众所周知，　数列[注17]是指一列有规律的数，数列中的每一个数都叫做这个数列的项。如果我们能够写出某一数列的全部项，那么我们就称它为有穷数列。相对地，如果不能穷尽某一数列的所有的项，我们就称其为无穷数列。

在高等数学的概念中，数列可以被视为自变量为正整数n的函数。这里我们要讨论的就是一种无穷数列的极端情况——一个无穷数列无节制地向下发展的结果是什么？

2.5　巴塞尔问题

巴塞尔问题在1644年被皮耶特罗・门戈利提出，1735年被莱昂哈德・欧拉解决。欧拉解决这一问题时年仅28岁。巴塞尔问题的内容是：有这样一个数列，它的首项是1，之后每一项都是该项值的平方的倒数，即第n项的值是

$$\frac{1}{n^2}$$

那么，当n趋近于无穷时，该数列的前n项和S_n等于多少？

我们不妨来计算一下：

$S_1=1$

$$S_2=1+\frac{1}{4}=1.25$$

$$S_3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\approx 1.361$$

$$S_4=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\approx 1.42361$$

$$S_4=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\approx 1.46361$$

……

如果你一直算下去，会发现这个数值将趋近于1.644934……恰好是

$$\frac{\pi^2}{6}$$

几乎没有人可以预料到

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

和圆周率π之间会有什么联系，但是数学中的巧合就是如此神奇。这个有趣的现象就是巴塞尔问题的答案。由于巴塞尔问题的结论出人意料，有人称其为“十大反直觉的数学结论”之一。

2.6　两个重要极限之一

有一个数列

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

它是一个无穷数列，因为无法穷尽它的所有项。换句话说，满足$n\in N_*$的所有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

都是合理的。在这个数列中，首项a_1的值为2。计算其他各项的值可得：

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

$$a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$$

$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\approx 2.37$$

$$a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\approx 2.44$$

$$a_5=\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=2.48832$$

$$\cdots\cdots$$

……

实际上，你如果不停地算下去，项的值无限接近于2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742……

那么当$n\to\infty$时，数列的这一项应该得多少呢？因为我们不可能无休止地计算下去，牛顿便给了我们一种简化计算的方法，即牛顿二项公式。

注18

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

有些学者认为：

注19

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

理由是

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

和

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

都可以被认为是自然常数e的值。但笔者认为：

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

显然的，n取正整数时，总有

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2!}$$

同样就有

$$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<\frac{1}{3!}$$

……也就是说

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\frac{1}{n!}$$

当n取正整数时恒成立。

因为当n趋近于无穷大的时候，我们算不出来

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

的具体值，所以我们就用字母e来表示这一常量。

常量e被称为自然常数，也叫欧拉数。关于为什么选用字母e，也有一些争议。但是它实际上是因为苏格兰数学家 约翰·纳皮尔[注20]引进对数才被发现的。约翰·纳皮尔在1618年出版的对数著作附录中的一张表里提及了一张自然对数表。而这张对数表实际上是由 威廉·奥特雷德[注21]制作。也有人认为e是来源于指数的英文exponential的首字母。

2.7　无穷小的比较

在介绍另一个重要极限之前，我们先来了解一下什么叫无穷小。无穷小并不是无穷大(∞)的相反数。按照之前取极限的说法，当$x\to 0$时，x、x_3和sinx等函数的值都是无穷小。有一种不严谨的说法是：可以把无穷大的倒数理解为无穷小。这种说法来源于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

对于这种不严谨的说法，我们很容易就能找出一个反例：

假如我们设了一个变量，它的大小是无穷大的话。那么它的平方是不是等于它本身呢？

如果我们假设$x_2=\infty$，那么就可以推导出$x=x_2$。显然，如果要使$x=x_2$成立，x应等于1或0而1和0都不是无穷大。由此推出之前的假设是不成立

的。此时我们发现，虽然x和x_2都是无穷大，但它们是不相等的。

而相同的情况也出现在无穷小中。

前面说过，当x→0时，x、x_3和sinx等函数的值都是无穷小，而且无穷大之间不相等的情况也会出现在无穷小中。既然无穷小不相等，那么它们之间是否存在大小关系呢？换句话说， 我们能不能比较出两个无穷小的大小呢[注22]？我们用

$\lim_{x\to 0} x$ 、 $\lim_{x\to 0} x^3$

和

$\lim_{x\to 0} \sin x$

分别表示当x→0时的x、x_3和sinx。当需要比较两数值大小时常用的方法为两数相减和两数相除，这里我们选择两数相除的方法。

我们来比较

$\lim_{x\to 0} x$

和

$\lim_{x\to 0} x^3$

欲比较1

$\lim_{x\to 0} x$

和

$\lim_{x\to 0} x^3$

的大小，只需将两数相除。则有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}$$

综上所述，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

的低阶无穷小。而比较无穷小之间大小的方法总结如下：
当

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$$

时，β是α的高阶无穷小；当

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$$

时，β是α的低阶无穷小；当

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}$$

＝非零常数时，β是α的同阶无穷小。特殊地，当

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}$$

＝1时，β是α的等价无穷小。

2.8　两个重要极限之二

下面我们会仿照上面的例子来比较

$$\lim_{x\to 0}$$

和

$$\lim_{x\to 0} \sin x$$

的大小。

有一种不严谨但易于理解的说法是：函数y＝sinx和y＝x在x→0时非常接近，所以它们是等价无穷小，也可以写成

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

其不严谨之处就在于，很难证明y＝sinx和y＝x函数在x→0时非常接近。

而较为严谨的证明过程，应参照图2-9来进行：

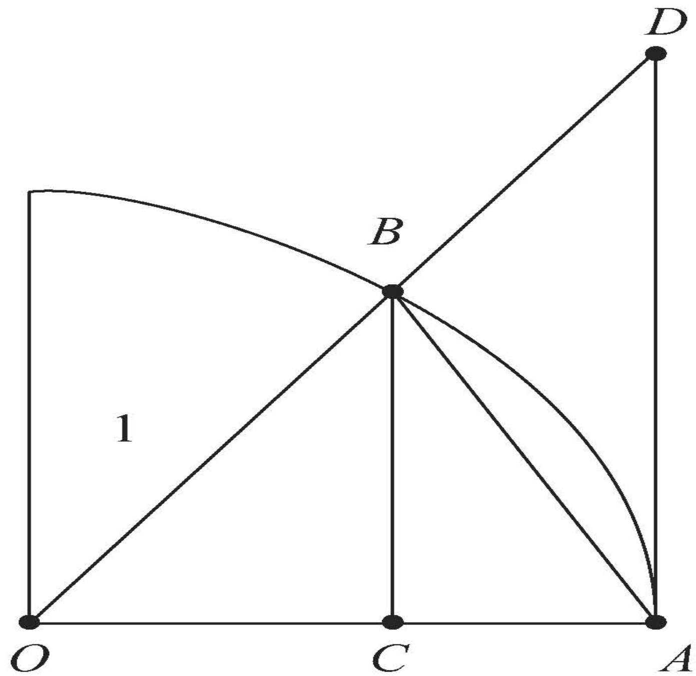


图2-9

显然，∠BOA小于九十度。我们过去学到的，形为“九十度”的表示方法叫做角度制。角度制是指将一个圆周等分成三百六十份，每一份便被称为一度的角。这种表示方法有个不可避免的缺点，就是难以和圆的相关公式更直接地产生关联。于是就产生了 弧度制[注23]。弧度制是指，以角的顶点为圆心画一个半径为1的圆。用角所对应的弧长长度表示角的大小的单位制。

但由于大量的相关公式中都会使用到类似180°或者360°等常量，所以使用弧度制表示为π或者2π更为便利。

在图中，存在$S_{\Delta AOB}$<$S_{扇形AOB}$<$S_{\Delta AOD}$，这里S表示某一图形的面积。

根据 计算[注24]，我们可以用

$$\frac{\sin x}{2}$$

表示$S_{\Delta AOB}$。同理我们分别用

$$\frac{x}{2}$$

和

$$\frac{\tan x}{2}$$

表示$S_{扇形AOB}$和$S_{\Delta AOD}$。

所以，我们可以把$S_{\Delta AOB}$<$S_{扇形AOB}$<$S_{\Delta AOD}$写成

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

消去分母后，该不等式变为：

$\sin x < x < \tan x$

之后只需为不等式各项都除以一个sinx，即可得到：

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

经整理后，有：

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

一些读者可能会对为什要这样整理产生疑问。一种解释是因为在书写上cosx比

$$\frac{1}{\cos x}$$

更为美观。但这种解释缺乏严谨性和说服力。另一种解释较为复杂，简而言之是因为cosx和

$$\frac{\sin x}{x}$$

都是偶函数，所以不需要考虑x的值是正数还是负数。

根据cosx的函数图像可知：

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,$$

既然当x→0时，

$$\frac{\sin x}{x}$$

的取值范围是从cosx到1。我们就可以说

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

这就是我们的另一个重要极限。当然我们也可以通过观察图2-10，即

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

的函数图像得知这一点。

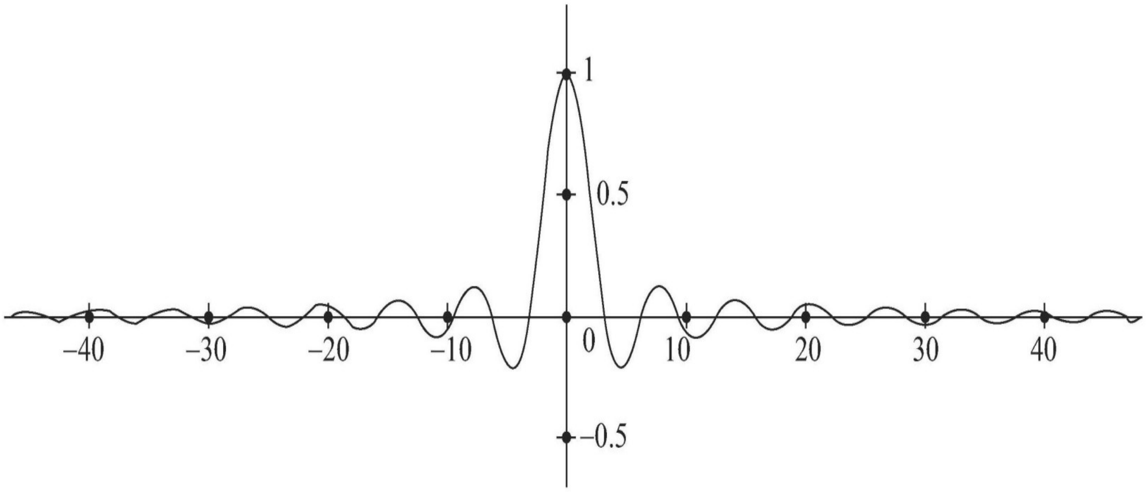


图2-10

也许有读者要问，既然可以通过函数图像得知，那么为什么一定要采用大段的证明呢？这是因为在这些理论被提出的时代，还没有计算机，更不要说是能够自动生成函数图像的软件。如果想重现那不借助函数图像的证明方法，就必须要证明

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

相关的内容我们会留到第3章再做说明。

2.9　重要极限为何重要

在学校，老师会告诉你：大部分求极限的题目中都可以视为考察重要极限公式。日本著名数学教育家 米山国藏[注25]先生说过：“作为知识的数学，出校门不到几年可能就忘了，唯有深深铭记在头脑中的数学的精髓、数学的思想研究方法和着眼点等，才会随时随地发生作用，使人们终身受益。”两个重要极限在微积分思想中起着举足轻重的作用，对深入了解极限理论具有决定性的指导意义。

思考题

假设有一个边长为1的等边三角形，将每条边三等分，然后再以两个等分点为端点，向外画一个边长为其三分之一的等边三角形，这样便可以得到一个六角形。现在取六角形的每个边，反复做同样的变换，如图2-11所示。

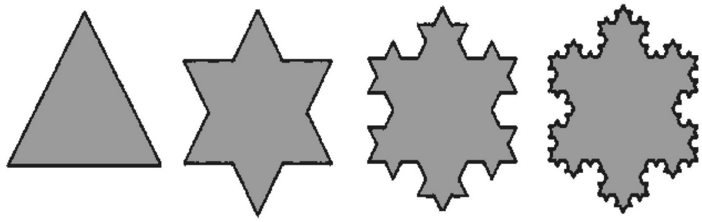


图2-11

当重复无数次这样的操作之后，深灰色部分的面积是如何变化的呢？这样的变化会停止吗？如果会停止，那么该区域最终会变成什么样子呢？如果不会停止，它会以什么样的趋势发展下去呢？

数学视野

现在你可以说：“我也懂高等数学了！”看，那些理工学霸们会的花哨小玩意儿也不过如此吗。

之前说过的导数的表示方法。最常见的导数表示方法自然是 拉格朗日[注26]的方法。

但是，函数求导后得到的导函数(即求导后的函数)有时需要再次求导。这样就有了二阶导数。拉格朗日想出的方法是，在函数的上标的位置加两个撇来表示二阶导数。但是，还有三阶导数、四阶导数、五阶导数、六阶导数，甚至是十几阶或者是二十几阶的导数。万一遇到求几百阶几千阶的导数的话，如果还用拉格朗日的画撇方法，可能光是画撇就要画上好几分钟甚至个把小时。于是就出现了一种将拉格朗日的表示方法简化了的表示方法。即在函数上标的位置上画一对儿小括号来表示求导，括号内的数值则表示求几阶导数。如f(x)的五阶导数可以写成$f_{(5)}(x)$。

图2-12　莱布尼茨

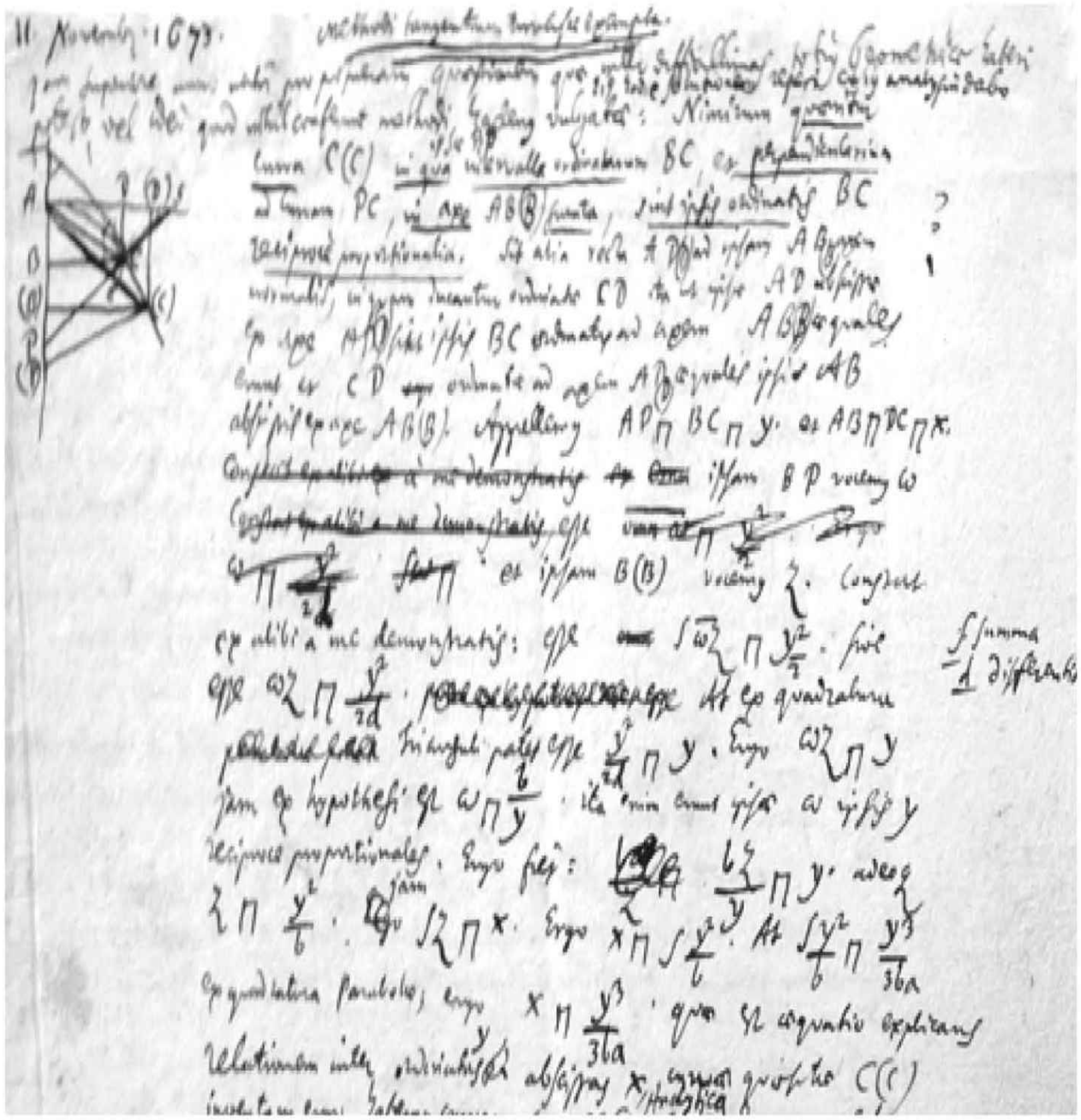
图2-12中是微积分的另一位发明者莱布尼茨。莱布尼茨在科学领域的贡献分散在各种学术期刊、成千上万封信件和未发表的手稿中，其中约有四成为拉丁文、约有三成为法文、约有一成五为德文。截止2010年，莱布尼茨的作品还没有收集完全。2007年，戈特弗里德·威廉·莱布尼茨图书馆暨下萨克森州州立图书馆收藏的莱布尼茨手稿被收入联合国教科文组织编写的世界记忆项目。

莱布尼茨是最早接触中华文化的欧洲人之一，他从一些曾经前往中国传教的传教士那里接触到中国文化，之前应该也通过马可·波罗引起的“东方热”了解过中国文化。法国汉学大师若阿基姆·布韦曾向莱布尼茨介绍了《周易》[注27]和八卦的系统。在莱布尼茨眼中，“阴”与“阳”基本上就是他的二进制[注28]的中国版。他曾断言：“二进制乃是具有世界普遍性的、最完美的逻辑语言”。今天在德国图林根著名的郭塔王宫图书馆内，仍保存一份莱氏的手稿，标题写着“1与0，一切数字的神奇渊源。”

莱布尼茨一生中最大的贡献就要数发明了一套简单明了的微积分符号。但是我们为什么不用莱布尼茨发明的导数符号来表示导数，而是使用了拉格朗日发明的符号呢？实际上，莱布尼茨发明的符号体系在物理学和医学等诸多专业领域中有着非常广泛的应用。在第10章我们就会见到莱布尼茨的符号在医学领域的应用。不得不说莱布尼茨发明的符号之所以能够保留至今，是因为他的符号能够最简单明了的表明求几阶导、参与求导的是哪一个变量。而且非常清楚地说明了导数实际上是求极限。图2-13展示的是莱布尼茨的手稿，在这份手稿中就有莱布尼茨自己发明的微积分符号。

比如为第1章涉及的多元函数求导，就会有到底是x_1参与求导，还是x_2参与求导的问题。即使两个自变量都要求导[注29]，它们之间也有先后顺序。

这时候拉格朗日的方法就不再适用了，一般我们都会选择适用莱布尼茨的表示方法。



我们知道在横纵坐标都去极限的情况下，导数所表示的是非常小的直线段，导数的值恰好是该线段的垂直跨度比上它的水平跨度，而这正是一次函数$y=kx+b$中斜率k的求法。所以导数也被认为是曲线上的点的斜率。如果曲线上某点的斜率不存在，我们就可以认为其导数不存在。

现在我们可以直接从导数的表达形式看出，导数的集合意义是斜率，这是莱布尼茨的表示方法的另一个优点。

添油加醋

若干个巫婆和一个公主共同居住在一个小岛上。如果一个巫婆吃掉公主，她就会变成公主。但这样她也会失去自己的法术，因此就有可能会被其他巫婆吃掉。假如所有巫婆在能够保命的情况下，都希望自己能够变成公主，那么在有20个巫婆的情况下，公主能不能安全地生活在岛上呢？

提示：和第1章中提到的海盗的问题一样，我们还是来建立一个比较简单的模型，然后将其一点点复杂化，这样就可以知道答案了。

假如只有一个巫婆和公主生活在岛上，那么巫婆肯定会吃掉公主。因为她知道在吃掉公主之后，也没有人能威胁她了。

如果有两个巫婆和公主一同生活在岛上，公主会不会安全呢？答案是肯定的。因为如果哪个巫婆先吃了公主的话，就会变成一个公主和一个巫婆的情况，那么先吃掉公主的巫婆就会被另一个巫婆吃掉。为了保命，两个巫婆都不敢去吃公主，所以公主会是安全的。

接下来再让模型复杂一点。如果有三个巫婆的话，她们中肯定有一个会先吃掉公主。因为这样就变回了上一段中的情况，剩下两个巫婆谁也不敢吃她，因为先吃她的巫婆肯定会被另一个吃掉。

然后再让模型复杂一点点，当有四个巫婆的时候，如果有谁先吃了公主，那么马上就会变成三个巫婆的情况，那时谁也不敢先吃公主。所以公主是安全的。

根据这样的规律，当岛上有奇数个巫婆的时候，巫婆会先下手为强吃掉公主；当岛上的巫婆是偶数个的时候，所有巫婆都不敢先吃公主，以避免变为奇数个巫婆的情况之后自己被吃掉。由此我们就得出了这样的结论：

当岛上的巫婆是偶数个的时候，公主能安全地生活在岛上。题目中说岛上有20个巫婆，而20显然是个偶数，所以公主能安全地生活在岛上。

第3章　计算面团的大小

3.1　厨房数学二三事

经过第2章的学习，我们终于可以说自己也懂微积分了。我们知道了导数的意义——导数可以表示运动物体的瞬时速度或某一图形在某一点上的斜率。而在之后的3章，我们都会围绕导数进行讨论，来深入了解导数及其相关定理。另外，我们还将从现实生活当中抽象出合理的数学模型。

在这一章中，我们会走进厨房，来计算面团的大小。如果你总是弄不清楚和面的时候要放多少面粉、多少水，那你可一定不要错过本章内容。

我们将一起从数学的视角解释和面过程中的科学内涵。

3.2　建立数学模型

虽然之前我们一直从实际问题出发，不过我们一直都是在想象和假设中进行计算或推理的。尽管这样做让我们一下子就理解了函数和极限这类抽象的数学概念，但其弊端就是缺乏严谨性和说服力。为了让结论更具有说服力，我们就要建立数学模型。

数学模型有一点像是拍电影时用的微缩模型。譬如，拍摄古装剧时，出于对古迹的保护而不能在真正的古代皇宫进行拍摄时，剧组就需要建立一个仿真的皇宫。虽说这皇宫是个“冒牌货”，但只要在视觉效果上没有差别就可以了。再比如说，拍摄某些危险的镜头时，要请特技演员，也就是我们常说的替身演员上场表演。又或是需要拍摄地震、海啸之类的灾难片的时候，导演会采用拍摄微缩模型或是通过计算机合成的技术营造真实的视觉体验。

在科学研究过程中，也会出现无法对真实事物进行研究的情况。比如，研究[进化论[注30]时，我们不可能让地球上的所有生物都退化成单细胞的状态。那么，当遇到这种棘手的问题时，我们怎么办呢？这时，抽象模型就发挥了重要的作用。在数学上，我们建立的抽象模型就叫 数学模型[注31]。

3.3　假说演绎法

那么，我们要如何建立数学模型，又该以怎样的方式研究我们的数学模型呢？假说演绎法便是一种广受青睐的方法。虽然假说演绎法有时会让我们陷入一些看似合理的误区，但在历史上，假说演绎法仍帮我们解决了不少难题，例如[孟德尔注32的 遗传因子注33理论。图3-1所示的是假说演绎法的一般步骤。

假说演绎法的一般步骤可以被归纳为：观察和分析现象、推理和想象、提出问题、演绎推理、提出假说、实验验证和得出结论。也有人将其归纳成更简单的四步循环，如图3-2所示。用更科学的说法描述这一过程则是：揭示了现实现象和数学模型的关系。从数学模型的角度上看，该方法是将现象加以归纳、抽象。所以，数学模型虽然源于实际，但要比实际现象更为抽象。如果从实际现象来观察呢？对数学模型的解答需要经过实际现象的检验，并且对实际现象加以指导，因此也有学者将这一过程归纳为“ 实践—理论—实践的循环注34”。

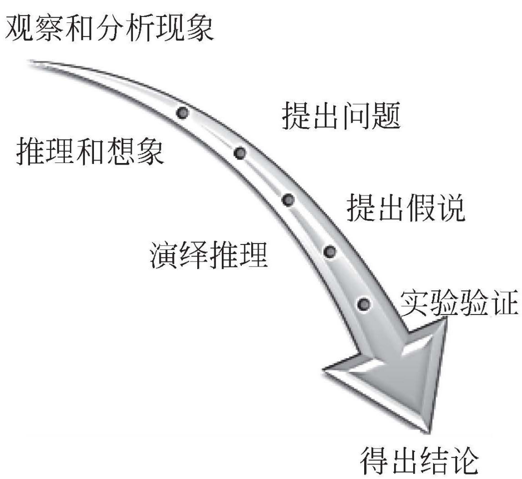


图3-1　假说演绎法

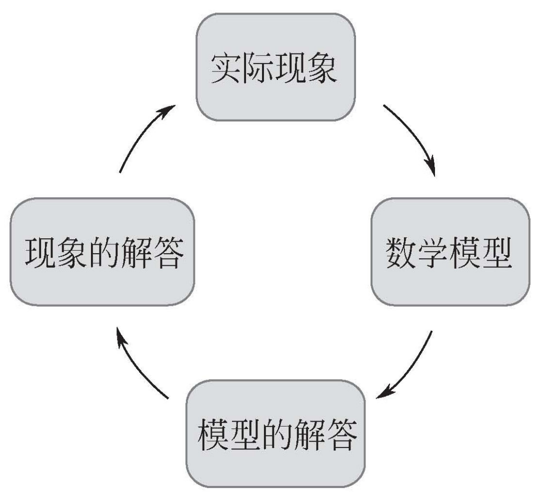


图3-2　四步循环

3.4　直觉和运气

无论是研究数学模型还是数学的其他分支，直觉和运气都起着至关重要的作用。在数学研究中，如果一上来的思考方向就和正确的方向大相径庭，那就很难得到正确的结论。当然直觉也不是凭空产生的，需要大家积累丰富的经验和知识并能熟练地运用多角度思考问题的能力。如果你想成为一名优秀的数学人才，不妨参考以下建议：

- 不迷信权威，要亲自动手并且敢于尝试；
- 一个优秀的数学人才不局限于他的学历、年龄或其他附加标准；
- 数学可以指导生活，数学能借你一双慧眼，数学能让生活更美好。

研究数学还需要一定的运气，比如天文学家 托勒密[注35]就是因为运气欠佳(图3-3)，才给出了错误的学说——地心说。根据他的学说，地球处于宇宙中心恒定静止的位置上。从地球向外依次有月球、水星、金星、太阳、火星、木星和土星等，并且都在各自的轨道上绕着地球运动着。在今天看来，这样的观点排除 其历史价值[注36]之外，显然是滑稽可笑的，但是在科研水平和条件有限的情况下，这样在今天看来能够被轻易推翻的理论，在当时却是学术的权威。这样的例子也曾出现在牛顿、 爱迪生[注37]这样的大科学家和发明家身上。我们不禁感叹，要是他们的运气再稍微好一点儿，世界不知道又要先进多少呢！所以说，对于研究数学和科学的人来说，“运气也是实力的一部分”一点儿都没错。

图3-3　托勒密画像

3.5　面团的模型

在现实世界中，绝大多数现象都存在随机性、动态性以及 非线性[注38]。这里为了研究方便，我们只取较为容易被观察和控制的属性，对特定现象进行研究，实际上就是对该现象做了简化和抽象。譬如，这里我们不考虑面团内酵母的质量对面团大小的影响。

我们简单地认为面团的大小v和面团的重量[注39]m之间存在

$$v = \frac{m}{\rho}$$

如果我们把它改写为一次函数的形式，即为v＝km+b。在该式中，

$$k = \frac{1}{\rho}$$

[注40]也可以写成k＝ρ^{-1}。另外，当面团没有质量时，它就是不存在的，也就没有体积，当m＝0时，所以b＝0。

我们如果把面团视为圆球形，那么就有

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

实际上面团并不是绝对的圆球形，我们姑且认为每个面团的形状都是相似的，但又和圆球形有一些差别。所以我们应用来表示其 系数[注41]。

$$\frac{4}{3}\pi$$

为了避免混淆，我们使用k_1和k_2以示区别。这样就有$v = k_1 m$、$v = k_2 r_3$进而推出$k_1 m = k_2 r_3$。近似圆球形的物体显然可以用它的 近似半径[注42]来表示其大小，也就是说存在

$$r^3 = \frac{k_1}{k_2} m$$

进一步计算可以得到：

$$r = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2} m}$$

因为

$$\sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}}$$

可以被视为一个新的系数，那么则有

$$r = k \sqrt[3]{m}$$

要特别说明的是，在手写的过程中常难以区别3到底是k的上角标还是指

$$\sqrt[3]{\quad}$$

即使明确地说明了这里是

$$\sqrt[3]{\quad}$$

的意思，仍然会给后续的计算带来不必要的麻烦。所以我们可以把

$$r = k \sqrt[3]{m}$$

写成

$$r = km^{\frac{1}{3}}$$

这样就不容易混淆了。图

3-4所示的是

$$r = km^{\frac{1}{3}}$$

的示意图和局部放大图，由于这是示意图，所以没有标出单位长度。可以看到在一开始的时候，曲线斜率变化较大，但接下来却趋于平缓。这和我们在和面的时候，加少量的面粉时面团的大小变化得较为明显，而当面团的大小达到临界值时，再加入少量的面粉，其大小的变化则并不明显，甚至用肉眼都观察不到。这时我们就说它的斜率逐渐趋近于0，但却永远不为0。不过需要注意的是，这里的斜率并不是，而是r′。利用之前学过的导数和求极限的知识，可知

$$r' = \frac{k}{3} m^{-\frac{2}{3}}$$

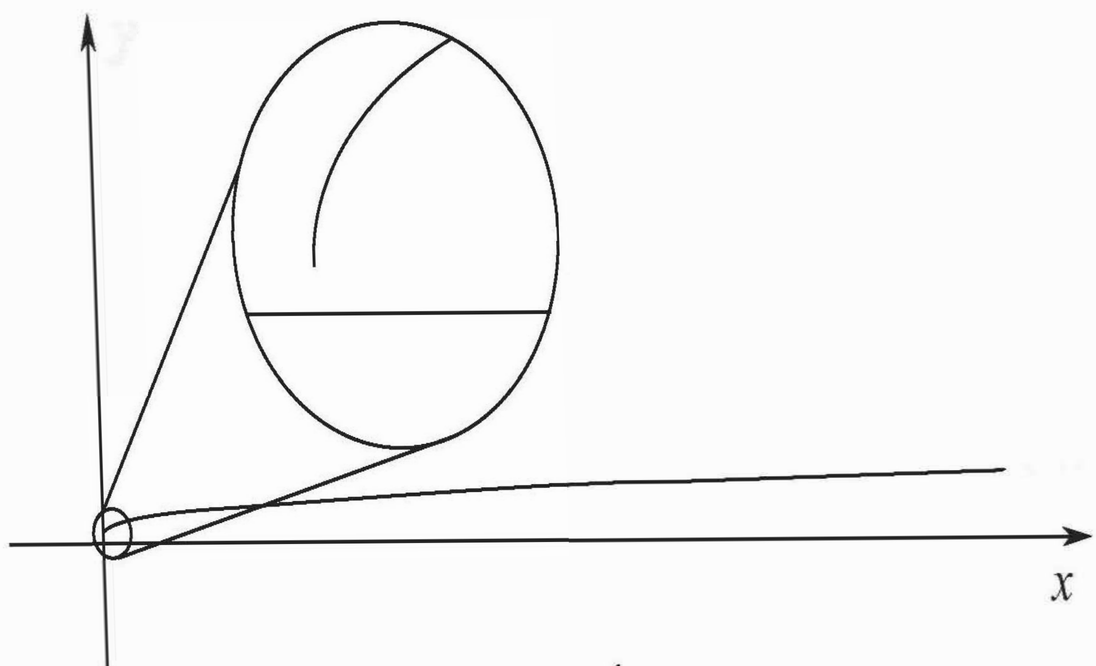


图 3-4　$r = km^{\frac{1}{3}}$ 的示意图

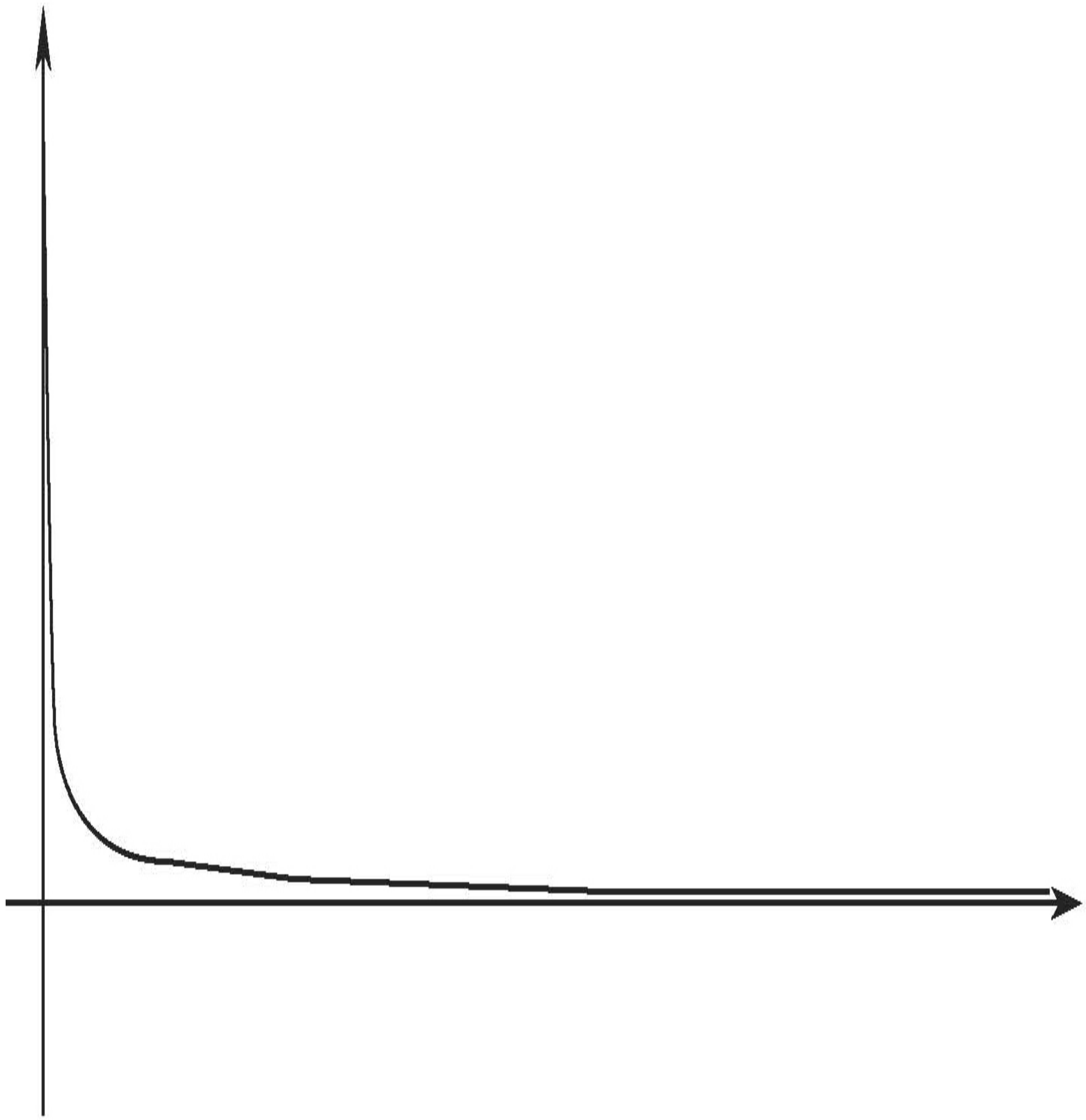


图 3-5　$r' = \frac{k}{3} m^{-\frac{2}{3}}$ 的示意图

3.6　导数公式

由于每次都需要通过求极限才能算出导数非常麻烦。所以就有人发明了一套更为简便的方法。实际上前文中的

$$r' = \frac{k}{3} m^{-\frac{2}{3}}$$

，也不是用求极限的方法求出来的，他使用的正是现在要介绍的方法——导数公式。导数公式的推导过程较为枯燥无趣，这里我们就走一条“拿现成的用”的捷径。主要的导数公式的推导过程都在附录2中了，有兴趣的读者可以自行查阅。但附录2中只有一部分导数公式的推导，其原因是其他的导数公式都可以根据后文所述的导数运算的法则相互转换。

(1)(C)′ ＝0(C是常数)

(2)$(x_n)'$ ＝nx_{n-1}

(3)(sinx)′ ＝cosx

(4)(cosx)′ ＝-sinx

(5)(tanx)′ ＝ $\sec_2 x$[注43]

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

(6)(cotx)′ ＝$-\csc_2 x$

(7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

(8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

(9) $(a_x)' = a_x \ln a$

(10) $(e_x)' = e_x$

(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

(12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.7 导数公式推导示例

这里我们推导 $f(x)=x\hat{}_n$ 的导数 $f'(x)=nx\hat{}_{n-1}$ (n为常数)为了方便起见，这里我们采用

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

的形式，而不是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

的形式。

设f(x$_0$)＝x$_{0n}$(n为常数)

$$\therefore 有\ f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\cdots+x_0{}^{n-2}x+x_0{}^{n-1})$$

$$=nx_0{}^{n-1}$$

对于大家来说，可能最难以理解的就是中间这一步，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\cdots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1})$$

是怎么来的了。首先，因为等式两边的极限运算符没有变，所以说明这一步并没有做极限的运算。那么就有

$$\frac{x^{n}-x_{0}^{n}}{x-x_{0}}=x^{n-1}+x_{0}x^{n-2}+x_{0}^{2}x^{n-3}+\cdots+x_{0}^{n-2}$$

$x+x_{0n-1}$，想要验证这样一个式子，思维活跃的读者可能已经发现，只需要把左边分母上的$x-x_0$挪到右边去，就可以完成验证了。

现在我们以更科学的方法来检验这个等式：首先，我们在等式右边乘以$x-x_0$，可得：

$(x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1})(x-x_0)$

把括号打开，则有：

$x_{n-1}\cdot(x-x_0)+x_0x_{n-2}\cdot(x-x_0)+x_{02}x_{n-3}\cdot(x-x_0)+\cdots+x_{0n-2}x\cdot(x-x_0)+x_{0n-1}\cdot(x-x_0)$

再将括号打开则有：

$x_n-x_0x_{n-1}+x_0x_{n-1}-x_{02}x_{n-2}+\cdots+x_{0n-2}x_2-x_{0n-1}x+x_{0n-1}x-x_{0n}$

消去中间能够抵消的项，就有：

x_n-x_{0n}

所以，我们就得到了：

$(x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}+x_{0n-1})(x-x_0)=x_n-x_{0n}$

如果在等式两边同时除以$x-x_0$，则有：

$$\frac{x^{n}-x_{0}^{n}}{x-x_{0}}=x^{n-1}+x_{0}x^{n-2}+x_{0}^{2}x^{n-3}+\cdots+x_{0}^{n-2}x+x_{0}^{n-1}$$

这样我们就知道了这一步是怎么计算的，而这实际上是一种计算经验，当你足够熟练的时候，就可以自如地写出这样简单的式子来了。

3.8　导数的运算法则

如前所述，导数的运算法则的出现就是为了处理较为复杂的导数。那么，我们假设$u=u(x)$，$v=v(x)$都是可导的，那么导数的运算法则可以写成以下形式：

$(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(Cu)'=Cu'$　(C是常数)

$(uv)'=u'v\pm uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

实际上这些运算法则都是由我们之前学习过的极限运算法则推导而来的，读者很容易就能够从极限的运算法则推导出导数的运算法则。当然为了后续使用方便，这里我们直接给出了这些公式。在高等数学领域，直接使用前人推导好的公式或定理的行为叫做模块化思维，它对于我们学习微积分尤为重要，因为更多的时候，我们是站在巨人的肩膀上来研究和解决未知问题。仔细想想，之所以总结这些公式，倒有可能是数学家们为了偷懒。

有了这些公式之后，所有求导数的问题都可以配合附录中的求导公式来解决。这真是要感谢数学家们的努力，这才让微积分变得这么简单。

3.9　再战！复合函数

在第1章就学习过的复合函数。关于复合函数的求导过程，我们这里给出一种最为普遍的范本，无论对多么复杂的复合函数求导，只要按下列过程进行推演，一定可以解决问题。

我们设有一复合函数$y=f(u)$，其中$u=g(x)$，且$f(u)$、$g(x)$都可导。那么$y=f[g(x)]$的导数为：

$y'=f'(u)\cdot g'(x)$

那么我们现在来检验符合函数求导公式的正确性。如有一函数$f(x)=(x+1)_2$，请试求它的导数$f'(x)$。

如不采用复合函数求导的方法，则应先把$f(x)$化简，即写为：

$f(x)=(x+1)_2=x_2+2x+1$

接着按照导数的加减法法则对$f(x)$进行求导：

$f'(x)=(x_2+2x+1)=(x_2)'+(2x)'+(1)'=2x+2+0=2x+2$

所以有$f'(x)=2x+2$。

现在我们按照复合导数求导的法则对$f(x)$进行求导。首先我们设$u=g(x)=x+1$，且有$f(u)=u_2$。这样就有：

$f'(x)=f'(u)g'(x)=(u_2)'(x+1)'=(2u)\cdot(1+0)=2u=2(x+1)=2x+2$

经过整理，也能得出$f'(x)=2x+2$的结论。所以，复合函数的求导法则是正确可靠的。

3.10　反函数与反函数求导

你还记得在上一章中我们讨论过的对称吗？而反函数就要从对称和翻折说起。如果有一函数$y=f(x)$，那么它的反函数就是将其图像沿着$y=x$这样一条斜线进行翻折后得到的图。但是这种翻折也不是绝对的，我们还需要考虑定义域等因素。所以严谨一些的说法应该是：让该函数的某一部分沿着$y=x$的图像进行翻折。

有的读者可能就会问：“这么折腾来折腾去，求反函数有什么意义吗？”

一般来说，反函数和原函数的自变量和因变量对调，拿第1章的例子来说，即我们可以通过缩印用了多少页纸推算出原本需要印多少页的资料。而拿本章的例子来说，即通过测量面团的近似半径来求出它的重量。因此，反函数常被用于天文学和经济学等学科的部分计算中。

如果某函数 $x=f(y)$[注44]，它在 某一段[注45]内是 单调的[注46]，并且具备可导的性质，满足$f'(y)\neq 0$。

要求$f'(y)\neq 0$的原因是，如果$f'(y)=0$，则说明它在此处是一条水平的线，那么经过翻折得到的反函数就一定有一段线是垂直的，而一条垂

直的线的导数是没有意义的，也就是其不存在导数。既然这样导数不存在，那么我们就没有办法求它的导数了。

把$x=f(y)$的反函数写作$y=f_{-1}(x)$，我们可以这样理解：f_{-1}表示的是f的反函数，由于自变量和因变量的位置需要交换，所以就写成了$y=f_{-1}(x)$。

按照之前学过的求极限的方法，我们在该函数的指定区间内，任取不重合的两点——x和$x+\Delta x$。因为我们事先规定过$x=f(y)$在这一段中是单调的，那么我们就可以推出，经过翻折后得到的反函数$y=f_{-1}(x)$在同一段中也是单调的。既然它是单调的，那么则有：

$\Delta y=f_{-1}(x+\Delta x)-f_{-1}(x)$且$\Delta y\neq 0$

于是就有：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

由于$y=f_{-1}(x)$是可以求导的，那么根据导数存在的准则(将在第4章详细介绍)，它一定是连续的，所以会有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

即：

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}$$

综上所述，我们可以把结论归纳为：反函数的导数等于原函数的导数的倒数。

3.11　中文房间与黑箱模型

图3-6所示的是约翰·希尔勒提出的经典的“中文房间悖论”。其内容是，假设有一个以英语为母语且不通外语的人身处一个除了门上有一个小窗口以外全部封闭的房间之中。他随身带着一本英汉字典，房间里还有足够的稿纸和笔。写着中文的纸片通过小窗口被送入房间中。根据 约翰·希尔勒[注47]的假设，房间中的人可以使用字典来翻译这些文字并用中文回复。即使这个人完全不会中文，约翰·希尔勒认为通过这个过程，房间里的这个人可以让任何房间外的人误以为他会说流利的中文。

所谓黑箱模型，就是把研究的现实现象想象成一个内有若干机关的不透明黑色箱子。对于研究对象的内在机理我们尚不了解，比如在生化反应中，由于干扰因素众多、内在联系复杂、难以观测等特点，我们就把它抽象成黑箱模型。随着进一步的研究和科学的进步，我们逐渐理解了黑箱模型的内在机理，即搞清了黑色箱子内部机关的构造。这时候我们就称其为白箱模型，也就是能看清内部机制的模型。譬如在力学、热学和电学等学科中，经过科学家们的不懈努力和长期研究，已经基本搞清了某模型的内部机制，我们就可以说这是一个白箱模型。当然也有像生态学、气象预报学这样的学科，我们已对其内部机理做了一部分研究，但还有尚不清楚的地方，此时我们就称其为灰箱模型。

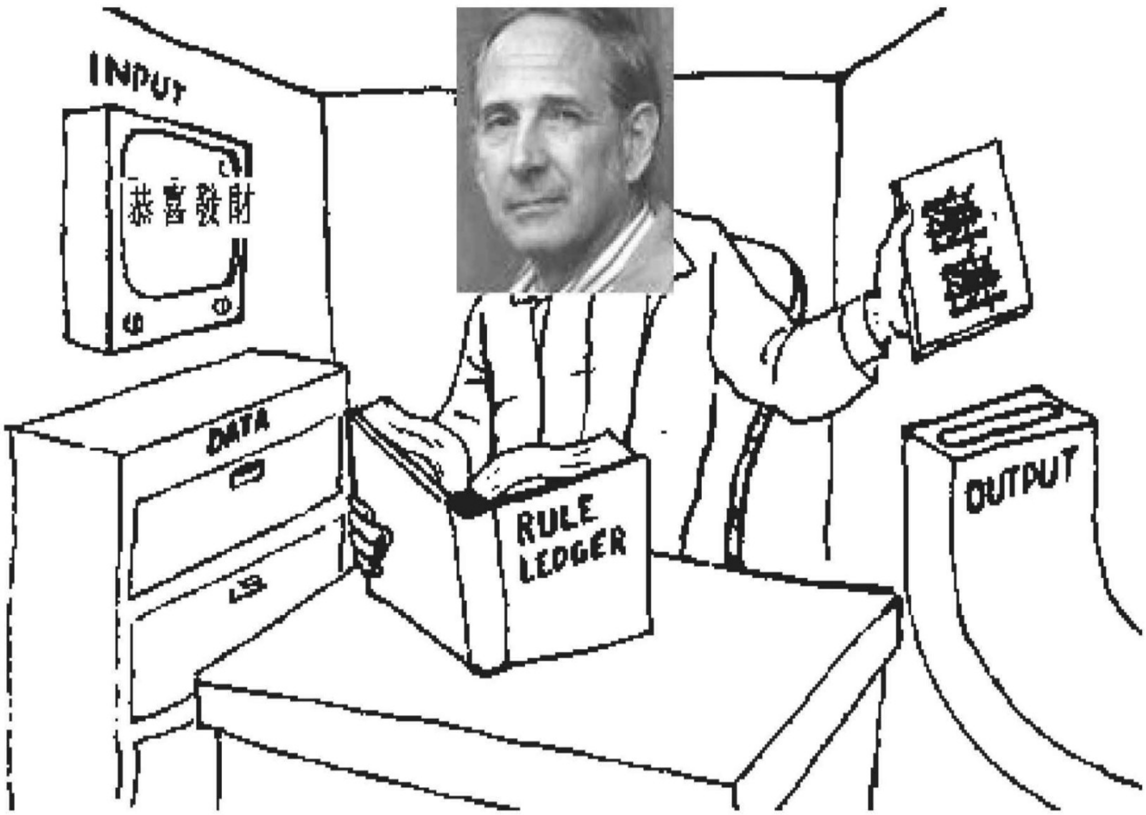


图3-6　“中文房间悖论”示意图

思考题

有一函数

$$y=\sqrt{\left(b+\frac{bx}{a}\right)\cdot\left(b-\frac{bx}{a}\right)}$$

，在该函数上是否存在一点M，使得M点的切线与坐标轴围成的图形是等腰三角形？如果M点存在，请说出它的坐标；如果M点不存在，请说明理由。

数学视野

关孝和(1642[注48]～1708)，字子豹，著名的日本数学家(图3-7)，代表作有《发微算法》等。关孝和是内山永明的次子，后过继给关家作养子。

图3-7　关孝和画像

关孝和的研究工作涉及范围极广，并且取得了许多先进的数学成果。他的出现使得日本数学界发生了巨大变化，达到了一个鼎盛时期，进入了历史最高水平，并且为 和算[注49]的形成奠定了基础。

关孝和在数学领域最著名的贡献就要数行列式了。行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的。其雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里德·莱布尼茨各自独立得出。

1683年，日本数学家关孝和在他的著作《解伏题之法》中首次引进了行列式的概念。\从此行列式就得到了广泛的应用，主要是用来求解高次方程组。

第4章　弹珠的运动

4.1　拨开历史的迷雾

在第2章中，我们知道了用撇表示导数的符号体系是由拉格朗日发明的。而在本章中，我们将拨开历史的重重迷雾，揭开微积分诞生之后数学发展的神秘面纱。在牛顿和莱布尼茨发明微积分后，欧洲数学分裂为两派。英国仍坚持牛顿在 《自然哲学中的数学原理》[注50]中建立的几何方法，进展缓慢。而在同一时期，欧洲大陆则推崇 莱布尼茨创立的分析方法[注51]，进展很快。 欧拉[注52]和拉格朗日(图4-1)是其中最大的开拓者。后者在十八世纪创立的主要分支中都有开拓性的贡献。

图4-1　拉格朗日的纪念邮票

4.2 导数存在的准则

在第2章中，我们讨论过极限的存在的准则，如果极限不存在，那么导数就更无从谈起。通过之前的学习，相信你一定能够理解导数本身实际上就是极限的一种特殊情况。

当然这种说法和那些刻板的学术文章并无不同，那么我们就用一种更简单、更好理解的方式来解释函数的可导性。因为在第2章我们已经知道了导数的几何意义是其函数在切线处的斜率。那么如果说导数不存在(函数不可导)，就可以归结为以下四方面原因。

$$\text{导数不存在的原因}\begin{cases}1.\ f(x)\text{不是映射}\\ 2.\ f(x)\text{在该点不连续}\\ 3.\ f(x)\text{在该点处的切线是平行于}y\text{轴的}\\ 4.\ f(x)\text{在该点处不能做出唯一的切线}\end{cases}$$

那么我们现在来解释一下，为什么在这四种情况下函数不可导(也可以说导数不存在)：

首先，当f(x)不是映射的时候，就是说f(x)不能做到在X集合中的每一个元素都能够按照映射法则f在Y集合中有唯一确定的元素y相对应。 显然，如果f(x)不是一个函数，我们就不能画出它的函数图像，更没有斜率了[注53]。

其次，当f(x)在所求点不连续的时候，我们当然是没有办法求它的切线的。比如 在给定点的位置函数没有图像[注54]，这种情况我们是没有办法求它的斜率的，也就不存在导数。

再次，当f(x)在给定点处的切线平行于y轴时，整条函数曲线都平行于y轴是不可能的。因为如果整条曲线都平行于y轴的话，那么f(x)将不是映射，满足第一条原因。即使f(x)中没有哪一段线是完全平行于y轴的，也有可能会有某一点的切线是平行于y轴的，比如说，

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

在原点处的切线方向就平行于y轴。这就导致虽然

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

是函数并且连续，但该处的切线没有斜率，所以导数也不存在。

最后，如果f(x)在某一点能做出不止一条和曲线只有一个交点的直线，我们可以将其理解为 切线不唯一[注55]，那么斜率也就不唯一。换句话说，就是没法算的情况。所以遇到这种棘手的情况，我们就选择不算了。这并不是因为数学家偷懒或者随性，而是因为导数在这种情况下也是不存在的，所以才导致没法算。

除了上述情况，导数都是存在的。大家也可以把这条规律总结为：可导必连续，连续不一定可导。这样的口诀只是为了方便大家进行记忆，而它背后的道理实际上更为重要。

4.3　罗尔定理

罗尔定理的原文是：如果函数f(x)满足：

(1)在闭区间[a，b]上连续；

(2)在开区间(a，b)内可导；

(3)在区间端点处的函数值相等，即f(a)＝f(b)，那么在(a，b)内至少有一点ξ(a＜ξ＜b)，使得f′(ξ)＝0。

那么我们就来试着解释并证明罗尔定理。如图4-2所示，现有水平排列的两个点A和B，并有一条虚线把它们相连。现在请拿起笔，在垂直方向上可以任意地移动，但在水平方向上只能从左到右，不能后退，并且画出的线不能断。如果你画出的线完全满足上述条件的话，那么这条线实际上就是由图4-3中的图形的一部分、几部分或是全部进行平移、拼接、旋转、放大或是缩小而组成的。换句话说，无论怎么画，我们都可以把它等价成图4-3中的曲线。所以我们就用图4-3来讨论罗尔定理。

图4-2

显然的，如果图4-3是 某一函数注56图像的局部的话，它在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，并且满足f(a)＝f(b)。现在我们只需要在这条线上找到一点ξ，使得f′（ξ）＝0，或是把这曲线分割成无数细小的直线段，看其中有没有一小段是平行于A和B的连线的。

如图4-4所示，显然有两点使得f′（ξ）＝0。也就是说，有两小段线段是和A、B的连线平行的。

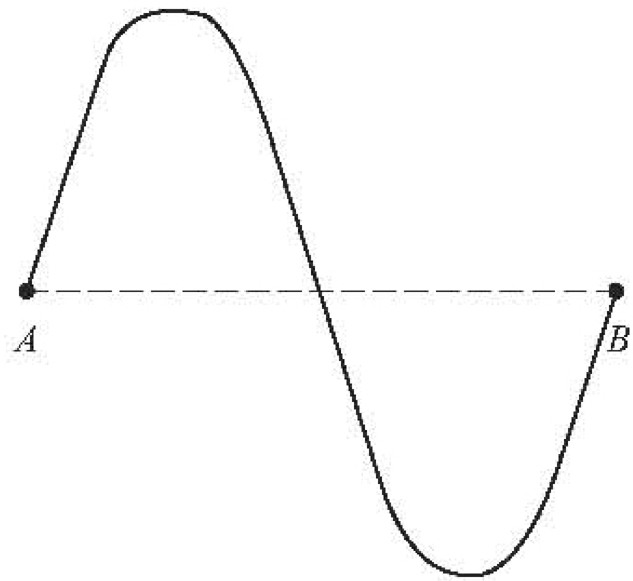


图4-3

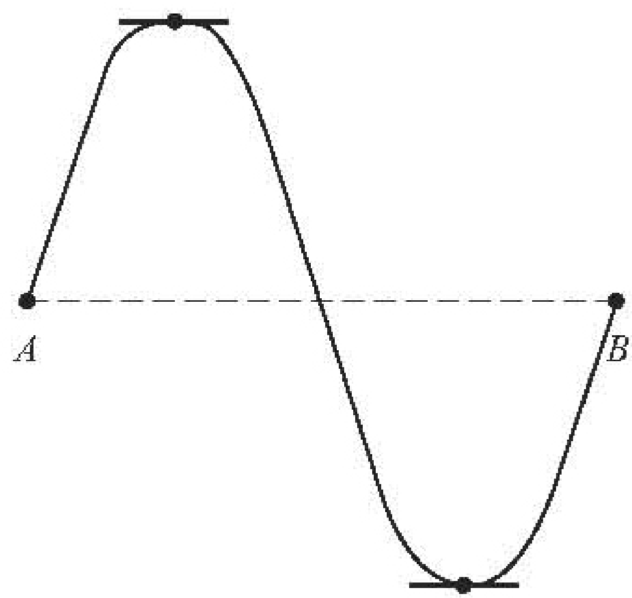


图4-4

4.4　拉格朗日中值定理

与上述情况相类似，如果、两点并不是水平的，而它们的排列是 除了竖直之外注57的任意角度。是不是也一定存在某一小段是和A、B的连线平行呢？这里介绍一种巧妙的证明方法：只需要这本书旋转一定的角度(但不能使得A和B两点的排列是竖直的)观察图4-4，就能清楚地看到，一定有某一小段线段是和A、B的连线是平行的。这就叫做拉格朗日中值定理。

实际上，拉格朗日中值定理是罗尔定理的一种推广。因为在罗尔定理中，A和B两点是水平的，所以A、B的连线的斜率为0，且ξ处的斜率(导数的值)也为0。然而在拉格朗日中值定理中，A、B两点并不一定是水平的，但也存在A、B的连线的斜率等于ξ处的斜率(导数的值)的情况，所以我们就可以把处的斜率(导数的值)表示为A、B的连线的斜率。

若使用数学语言表达就是：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

也有人习惯写成：

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

在第2章中我们了解到，常数的导数是零，如果你不知道为什么常数的导数是零，你可以认为常数是一条水平的直线，水平直线的斜率是零，所以常数的导数就是零。当然你也可以使用下面的方法来证明常数的导数是零：

设$f(x)=C$　(C为常数)

∴有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

∴故f(x)＝C时，有f′(x)＝0

根据拉格朗日中值定理，我们可以推导出，如果一个函数f(x)的导数恒为零，那么它一定是常函数。常数的导数是零和它的逆命题——如果一个函数f(x)的导数恒为零，那么它一定是常函数，都是成立的。这一结论将会在第6章以后广泛使用。

4.5　伽利略的困惑

众所周知， 伽利略[注58](图4-5)是科学史上伟大的数学家、物理学家、天文学家。伽利略一生中最大的成就就是推翻了 亚里士多德[注59]那些通过凭空想象和主观臆断得到的错误结论，并且奠定了经典力学的基础，有力地反驳了托勒密[注60]的地心体系。

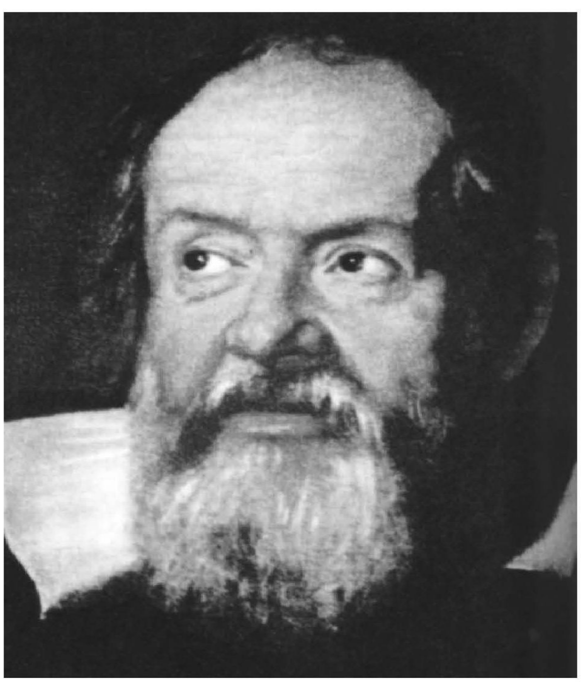


图4-5　伽利略的画像

伽利略对17世纪的自然科学发展起到了决定性作用。现在普遍认为，近代自然科学是从伽利略和牛顿建立的实验科学开始的。伽利略的理想斜面实验不仅推翻了 亚里士多德的错误观点注61，也为牛顿的力学三定律提供了强有力的理论基础。

他的理想斜面实验的结论被牛顿总结为 惯性定律注62——任何物体都保持着匀速直线运动或静止状态，直到外力迫使它改变运动状态为止。

但是，我们在第2章讨论过的瞬时速度、平均速度，以及即将要讨论的加速度等问题也曾经困扰过伽利略这样的大师。

4.6　泰勒展开注63

假设有一弹珠在开始观测时距离我们的观测点有x米的距离，如果用f(t)表示它在时刻与观测点的距离，能否写出一个关于t的函数f(t)呢？

如果弹珠永远是静止的，那么显然f(t)＝x，这时可以说f(t)的取值和时间t无关。假如这一弹珠以v的速度匀速运动，那么则有f(t)＝x+vt。这里如果对时间t 求导注64，我们就可以得到弹珠运动的速度v，这个速度既是弹珠的平均速度，又是弹珠的瞬时速度。

这时要引入一个我们在中学阶段学过的物理量—— 加速度注65。其类似我们在第2章讨论过的，火车出站之后的一段时间在做加速运动，进站前一段时间在做减速运动。

假如现在小球的瞬时速度的变化如图4-6所示。由于我们在第2章就学习过了任意时刻的瞬时速度可以表示为距离的导数。相似地，我们对瞬时速度求导就得到了加速度。这里我们用a来表示加速度。如果加速度恒定，就说明有f″(t)＝a。我们往回逆向推理就有速度f′(t)＝v+at，这时的v不是瞬时速度也不是平均速度，而是当时间t为零时的瞬时速度，我们称其为初始速度或初速度。

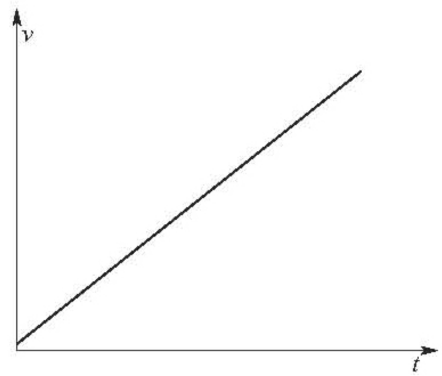


图4-6

如果我们再通过瞬时速度f′ (t)进行 逆向推理[注66]，就能推导出距离函数f(t)，即：

$$f(t)=x+vt+\frac{1}{2}at^{2}$$

如果加速度不是一个定值(常数)呢？如 图4-7[注67]所示。那么假如加速度的变化规律是一个定值，那么就有f‴(t)＝a_1，这里为了区别a和a的变化量，所以把原有的a称为a_0，新的a的变化量被称为a_1。

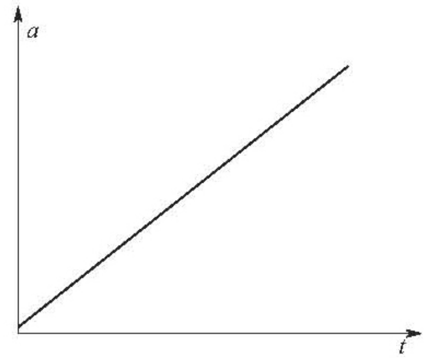


图4-7

于是就有$f'''(t)=a_1$，继续逆向推理则有$f''(t)=a_0+a_1t$，这时$f''(t)$表示的是瞬时加速度，相当于图4-7纵轴上的点。而a_0只表示加速度在时间t为零的时候的瞬时加速度，或者说是初始加速度。

按照这个规律逆向推理，就有瞬时速度$f'(t)$：

$$f'(t)=v+a_0t+\frac{1}{2}a_1t^2$$

那么距离f(t)为：

$$f(t)=x+vt+\frac{1}{2}a_0t^2+\frac{1}{6}a_1t^3$$

按照这个规律，可以推导到a_0、a_1、a_2、a_3、a_4…a_n。这里我们为了统一，将其写成：

$$f(t)=x_0+x_1t+\frac{1}{2}x_2t^2+\frac{1}{6}x_3t^3+\cdots+\frac{1}{n!}x_nt^n$$

实际上我们刚刚就发现了$x_1=f'(x_0)$、$x_2=f''(x_0)$、$x_3=f'''(x_0)$……所以有：

$$f(t)=\frac{x_0}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(x_0)}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

如果把上式中的t替换成x，我们就得到了泰勒展开的公式，也叫泰勒公式：

$$f(x)=\frac{x_0}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(x_0)}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

1712年，英国数学家布鲁克·泰勒在他的一封信里首次叙述了这个公式，但实际上1671年詹姆斯·格雷高里已经发现了泰勒展开的一种特例。到了1797年前夕，拉格朗日又提出了带有余项形式的泰勒定理。

严谨地说，如果函数足够平滑的话，在已知函数在某一点的各阶导数值的前提下，泰勒展开就可以用这些导数值做系数构建一个多项式，来计算函数在这一点的邻域中的值。说得简单一点儿就是：泰勒展开是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。

我们可以把泰勒展开理解为一个求近似的公式。之前我们说过，微积分中最重要的就是这种差不多、不较真的思想。这样看来，微积分或许是一种“懒人数学”呢。

4.7　泰勒其人其事

布鲁克·泰勒(1685年8月18日至1731年11月30日)，著名英国数学家。他出生于英格兰密德萨斯埃德蒙顿，逝世于伦敦(图4-8)。他凭借泰勒展开和泰勒级数闻名世界。1701年，他进入剑桥大学圣约翰学院，8年后移居伦敦，随即获得法学学士学位。后来他又于1714年获得法学博士学位。

图4-8　泰勒的画像

1708年，他就发明了一种解决“振荡中心”问题的方法，但是由于种种原因，这一方法直到1714年才被发表。所以事后约翰·伯努利与他一直就关于谁先发明此解法产生争议。

1712年，泰勒被选入皇家学会，同年他就卷入艾萨克·牛顿与戈特弗里德·莱布尼茨争抢微积分发明权的案子(实际上是泰勒加入了这一案子的委员会)。

泰勒于1731年在伦敦去世，他的遗作直到1793年才被发表。

思考题

你能用泰勒公式表示自然对数的x次方吗？写一写，试一试吧。此外，sinx又能不能用泰勒公式来表示呢？还有哪些你想用泰勒公式表示的函数？它们又应该怎么表示？

数学视野

幻方可以追溯到约四千年前的中国——大禹治水的时代。传说大禹治水时(图4-9)，有一天他正走在黄河边上，这时从黄河里浮出来一只巨大的乌龟，这只乌龟非常大，更有趣的是，它的后背上还有一些纹路。大禹仔细看这些纹路时发现：它的后背被分成了九块儿，每块儿里都有一些小点儿。大禹把每一行的小点儿加起来，再把每一列的小点儿，还有每一条对角线的小点儿加起来，发现都是十五。大禹正是得到了这只神龟的启示，最终成功治理了黄河。后来，神龟后背的图案被称为幻方。

图4-9　大禹治水

我们先来看下面一个问题：正如传说中所说的，幻方起源于大禹治水故事中的神龟，那么请将1～9这九个数字填入下列方格中，使得横、竖、斜方向的和都等于15。

在中国古代，有这样一首歌谣：“法以灵龟，二四为肩，六八为足，左七右三，戴九履一，五为中间。”

我们不难发现这样的一个问题：若5在中间，周围位置中相对的两个数字加和均为10。这是为什么呢？你能不能写出一种不同于歌谣的三阶幻方呢？

你可能写出和之前的幻方不同的幻方吗？如果你认为你写出的幻方和之前的幻方不同的话，请把它通过左右或上下翻折，顺时针或者逆时针旋转，变成和问题1中的幻方一样的幻方。而且你一定会发现，无论怎样排列这个幻方，5总是在中间，周围位置中相对的两个数字加和均为10。所以这个问题是无解的。

我们了解了三阶幻方，那么有没有二阶幻方呢？对于一个N阶幻方来说，它每一行数字的加和又是多少呢？显然，对于一个N阶幻方来说，需要把1至N_2个数填入格子中。那么这些数的和就可以用高斯求和公式求出，设所有数的和是S，那么$S=(1+N_2)\times N_2\div 2$。如果我们设每一行或每一列的数值加和是e，那么$S=N\times e$。所以就有$e=(1+N_2)\times N\div 2$。

那么是否存在一个二阶幻方呢？我们不妨先假设存在二阶幻方。于是，我们就用A、B、C、D四个字母来代替1、2、3、4这四个数值。那么，如果存在一个二阶幻方，他的e是多少呢？对于一个二阶幻方来说，e等于5。横着看，第一行可以概括为A+B＝5；第二行可以概括为C+D＝5；斜着看就有A+D＝5和C+B＝5。这时，如果我们将两个式子相减的话，就会得到这样一个式子：B-D＝0。

但是1、2、3、4这四个数字中没有两个相等的数字，所以二阶幻方是不存在的。

■ 洛必达[注68]法则(图4-10)：专治各种“不服”

图4-10　洛必达画像

之前在讨论“两个重要极限之二”时，你有没有过这样的疑问：既然

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

什么不能把x→0理解为是将x＝0代入

$$\frac{\sin x}{x}$$

进行计算呢？这里是一种极端情况，有人喜欢把这种情况称为“不服”。实际上是因为如果把x＝0代入

$$\frac{\sin x}{x}$$

后会出现：

$$\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

分母为0的式子是没有意义的，或者说是不符合数学计算的基本常识。

于是就出现了这种 “不服”注69的情况。

$$\frac{0}{0}$$

(零比零)的形式。

如果出现了零比零的形式，就意味着x→a时，f(x)和F(x)都趋近于零[f(x)和F(x)无关]，而且两者的导数在x非常接近但不等于a的时候都存在。且F′(x)≠0。

由于

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

存在，所以有：

注70

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

综上所述，有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

这就是洛必达法则。如果

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

在x→a时，把x＝a代入

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

后，仍然会出现：

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{0}{0}$$

这时只需再次使用洛必达法则即可，有：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

这种情况在a＝∞同样适用。

经过整理之后，上式可以写成：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

法国数学家洛必达在他1696年的著作《阐明曲线的无穷小分析》发表了这一法则。这一法则是在一定条件下通过对分子、分母分别求导后再求极限，来确定未定式值的方法。但经过研究，目前普遍认为这法则实际上是由洛必达的老师——瑞士数学家约翰·伯努利发现的。

约翰·伯努利(1667年8月6日至1748年1月1日)是瑞士著名的数学家家族——伯努利家族中的一员(图4-11)。伯努利家族是17世纪至18世纪瑞士的一个人才辈出的家族，其中以雅各布·伯努利、约翰·伯努利、丹尼尔·伯努利这三人的成就最大。约翰·伯努利对微积分的发展做出了推动性的贡献，还培养了多位欧洲数学家，他正是因此而闻名数学史。

图4-11　约翰·伯努利画像

1691年，约翰来到巴黎。在巴黎期间，他结识了后来成为法国著名数学家的洛比达。并于1691年至1692年这两年间为洛比达讲授微积分。由此二人成为亲密的朋友，建立了长达数十年之久的通信联系。

1693年，伯努利与德国数学家莱布尼兹建立了密切的通信联系，在他们的通信中，主要是对数学问题交换意见。约翰・伯努利是莱布尼兹的忠实拥护者，后来也被卷入了莱布尼兹与牛顿关于微积分发现优先权的争论。

三角函数、对数函数、指数函数、变量的无理数次幂函数及某些用积分表达的函数也是由约翰・伯努利引入的，同时他还指出对数函数是指数函数的反函数。正是由于约翰・伯努利的开拓，微积分和微分方程才得到了迅速的发展。1715年，在他给莱布尼兹的信中，引进了现在通用的用三个坐标平面建立空间坐标系的方法，也提出了用有三个坐标变量的方程表示曲面的方法。

约翰・伯努利与一百多位学者有通信联系，学术讨论的信件有两千五百余封，对于当时学术界的发展起到了至关重要的作用。约翰・伯努利也致力于教学，18世纪数学界的核心人物欧拉正是约翰・伯努利的学生。

第5章　股市的预测

5.1　证券交易市场的起起落落

股市瞬息万变，如果有一种能够预测股票上涨或下跌的大致规律的方法，那岂不是极好的吗？如果我们认为根据股票的走向图预测股票的上涨或下跌是可靠的(实际上在股票市场中，行情的变化与宏观经济的发展、法律法规的制定、公司运营的情况等息息相关)那么我们应该如何利用微积分分析股市呢？

其实这和第3章介绍过的建立数学模型的情况是一样的，即是我们对现实现象的简化和抽象。这样做的目的是方便我们进行讨论和研究，只有当我们把这个现实现象的简化模型研究透彻之后，我们才可以像第1章中分析海盗的博弈模型时那样，在后期慢慢地把模型复杂化，使得模型更加接近真实的情况。由于篇幅的限制，这里我们只讨论简化后的高度抽象的数学模型。

5.2　曲线的拟合

即使认为根据股票的走向图预测股票的上涨或下跌是可信赖的，我们也没有办法研究这种被简化后的模型。在这一章中，我们还要解决一个从第2章一直遗留到现在还没有解决的问题。我们在第2章中就了解到， 现阶段[注71]我们研究的函数中，绝大多数都可以画出对应的函数图像。而在第3章学习反函数时，我们只要知道 原函数[注72]和因变量的值，就可以轻而易举地推导出自变量的值。假如我们已经得到了一个函数的图像，同样可以推导出这一图像所对应的函数式。

如果是标准的初等函数，我们甚至可以完全还原出它的原函数。即使像是股市这样的现实情况，我们也可以通过曲线拟合的方法推导出最为接近并且几乎没有误差的图像。这个推导的过程就被称为拟合。

5.3　再探函数

似乎所有不喜欢甚至是讨厌数学的人，都是从函数开始产生厌恶情绪的。在许多人的中学阶段，函数一直是老大难问题。函数就像是一个诅咒，让数学成了大家的天敌。

有人曾把函数比喻成一台照相机。它反映了记录被拍摄的人的相貌的过程，我们管拍照的过程叫映射，把照片的底版称为因变量，而将被拍摄者叫做自变量。如果照相机是不动的，那么被拍摄者所站的位置应该有一个范围，如果太近两侧就有可能照不到，那么这个范围就叫做定义域。当然，现在也有非常高级的全景相机，可以将所有角度内的风景都拍进去，这说明我们的定义域也可以从负无穷到正无穷。

即使是这样的解释，似乎也不能完全让人理解什么是函数。后来人们发现了一种更有趣的认识函数的方法——通过曲线的拟合来学习函数。以前人们学习函数时，会像第1章那样先学函数，然后再像第2章那样画出函数的图像。虽然这种方法在逻辑上极为严谨，但不免让有些不擅长阅读英文的读者一头雾水。那些简单的初等函数，人们还能勉强看懂，但那些稍微复杂些的函数，对先学函数式的人来说简直就像天书。

图5-1　狄利克雷画像

于是，有人就想出了一个逆向学习函数的技巧——先得到曲线，再推出可以画出这条曲线的函数式。而这种方法的最大弊端就是无法应用于像狄利克雷[注73](图5-1）函数[注74]这样很难画出图像的函数。

5.4　一般的直线和竖直线

在第2章中我们介绍过，一般的直线都可以在 笛卡尔直角坐标[注75]中表示为如下抽象式：

$y=kx+b$

这里的k是直线的斜率，而$y'=k+0=k$，也就是说，直线的斜率实际上就是它函数式的导数。

但是对于竖直线来说，它本身不是函数也没有导数，更无法代入$y=kx+b$中。我们把它抽象成：

$x=b$

这样我们就可以轻松地看出，它的斜率不存在，也不能求导(因为这里自变量x恒等于一个常数，所以不能对x求导)。

实际上，描述一条直线的常用方法共有 八种[注76]。使用抽象式$y=kx+b$进行描述的方法叫做斜截式，原因是k恰好是抽象式$y=kx+b$的斜率，而b则是抽象式$y=kx+b$和纵轴交点到原点的 距离[注77](截距)。

这里还要介绍一下把抽象式$y=kx+b$和$x=b$统一的方法，即写成：

$ax+by+c=0$

抽象式$ax+by+c=0$被称为直线的一般式，因为在笛卡尔直角坐标系中，所有的直线都可以用一般式来表示。但要注意的是，在一般式中，a和b的值不能同时为零。还有，一般式$ax+by+c=0$中的b和斜截式$y=kx+b$以及斜截式不能表示的直线$x=b$中的b不是同一个意思：一般式中的b只是y的系数，没有截距之意。

在几何领域中，(不重合的)两点可以确定一条直线。那么，如果某一函数式为斜截式，就可以通过两点的坐标来确定这条直线。

5.5　圆

圆的定义非常多，其中有两种说法最为流行，一种是同一平面内到定点的等距的点的集合；另一种是一条线段绕着它的一个端点在平面内旋转一周，它的另一端点划过的轨迹。根据第二种定义，人们想象出图5-2中所

示的画圆工具。这就是圆规的雏形——将一条不可伸长的细绳对折后，在一端系上一支笔，另一端则被一个图钉固定在了纸面上。

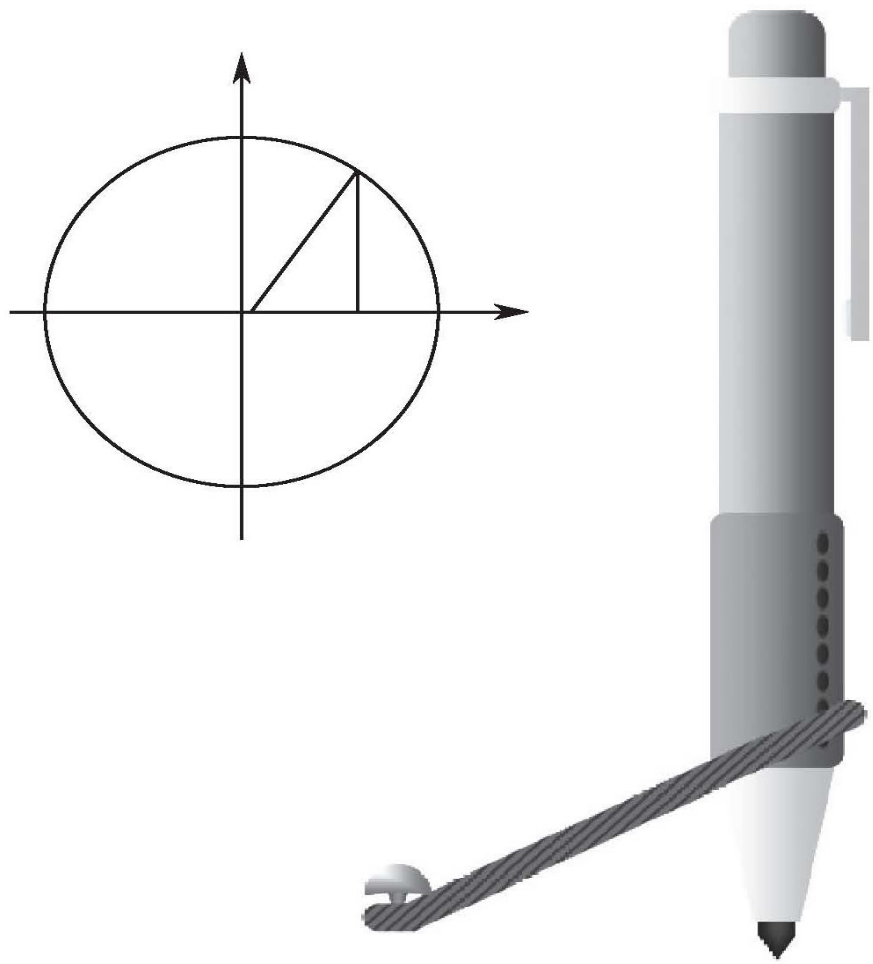


图5-2　一种画圆的工具

图5-2左上方所示的图像即是一个以原点为圆心的圆。我们可以用勾股定理来表示圆上每个点的坐标，即横坐标的平方加纵坐标的平方等于半径的平方：

$x_2+y_2=r_2$

如果圆心不在原点，那么只需要将式中的横坐标的平方变成横坐标与圆心的横坐标的差的平方。相应地，纵坐标的平方则要改成纵坐标与圆心纵坐标的差的平方。如果我们设圆心的坐标是(x_0，y_0)的话，则有：

$(x-x_0)_2+(y-y_0)_2=r_2$

如果你忘了什么是勾股定理(前言中有提及，也叫毕达哥拉斯定理)，也可以观察如图5-3的图案，这像风车一样的图案叫做玄图，其中的四个直角三角形是完全相等的。规定每个直角三角形中，较短的直角边的长度是a，另一直角边的长度是b，斜边的长度是c。那么通过观察，你认为a、b、c之间有什么关系？

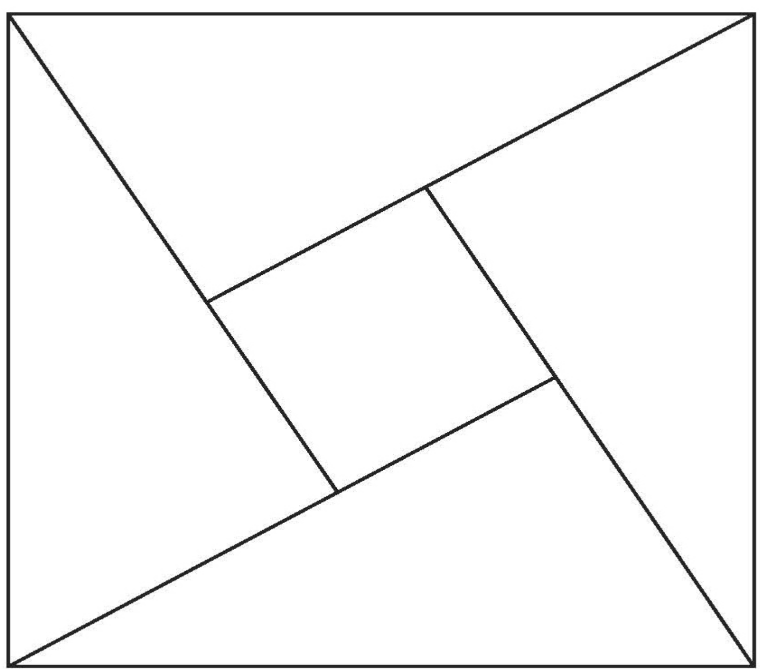


图5-3

首先里面小的正方形的边长应该是股减去勾的值，可以记为b-a，那么里面小正方形的面积就是$(b-a)_2$。另外四个直角三角形的面积都是勾乘股除以2，可以记为

$$\frac{ab}{2}$$

那么四个这样的三角形的面积为2ab。那么大正方形的面积既可以表示为弦的平方，即c_2。也可以表示为$(b-a)_2+2ab$。所以就有$c_2=(b-a)_2+2ab$，整理可以得到$a_2+b_2=c_2$。

5.6　从圆到椭圆

如前所述，所有的圆都可以用下面的抽象式表述：

(x-圆心横坐标)$_2$+(y-圆心纵坐标)$_2$＝半径$_2$

如果把上式中的汉字换成数学符号，则有：

$(x-x_0)_2+(y-y_0)_2=2$

如果把画圆的工具看成将一条不可伸长的细绳对折后，在对折的一端拴了一支笔，并用一个图钉将绳子两端固定在纸面上，那么画椭圆的工具就可以看成将一条不可伸长的细绳对折后，在对折的一端拴了一支笔，绳子的两头则被两个图钉分别固定在纸面上，如图5-4所示。

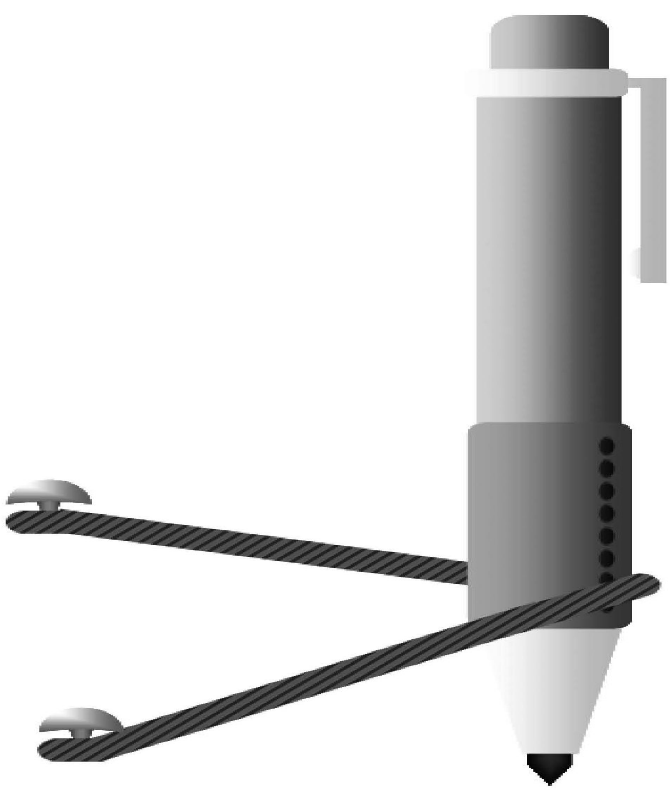


图5-4　画椭圆的工具

所以两个图钉到笔的距离的和应该是定长。如果有相关计算经验，可知椭圆的标准方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

如果没有这方面的计算经验，也可以选择一种较为特殊的情况来验证这一标准方程。

图5-5所示的是一个椭圆。在圆中，我们称“图钉”固定的点为圆心；而在椭圆中，我们称“图钉”固定的两个点为焦点。

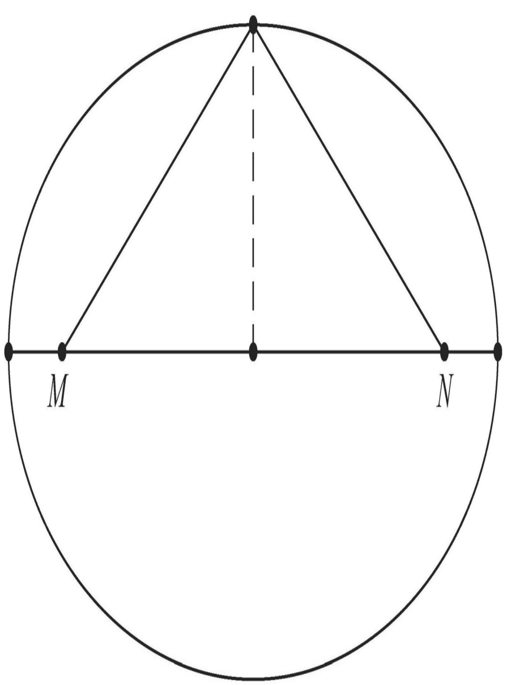


图5-5

我们可以认为椭圆原本是一个半径为1的圆。它在x轴的方向上被压缩了a，在y轴的方向上被压缩了b，就像被挤扁的柚子一样。

半径为1的圆的标准方程是：

$x_2+y_2=1$

如果它被压扁就变成了：

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

经过整理就得到了椭圆的标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

如果最初被压扁的圆的半径不是1，也可以通过在等式两边同时除以未压扁时圆的半径的平方来得到椭圆的标准方程。

5.7　三次样条线

显然，股票走势图既不是单纯的直线，也不是圆或椭圆这样规则的图形。经过无数实践的论证，有一种被称作“三次样条线”的曲线被认为是最能表示像股票走势图这样规律不明显的图像的曲线了。三次样条线的抽象式实际上就是三次函数的标准方程，即：

$y=ax_3+bx_2+cx+d$

相似地，除了三次样条线以外，还有二次样条线、四次样条线，等等。但是就曲线的拟合来说，考虑到计算的复杂程度和最终曲线图像的相似程度，四次样条线等三次以上的样条线的计算较为复杂，而二次样条线等三次以下的样条线的图像又和真实的情况相差甚远。所以经过综合考虑，我们一般使用三次样条线对曲线进行拟合。另一方面，还有一种拟合曲线的方法是求不定积分，这种方法拟合的曲线更为精确和方便。我们会在第6章中详细介绍。

有一种公认的对样条线的比喻，即在一条可以任意弯曲的绳子上钉一些图钉来确定绳子曲线。二次样条线就是需要钉三个图钉来确定的绳子曲线；三次样条线就是需要钉四个图钉来确定的绳子曲线。以此类推，N次样条线就是要钉N+1个图钉来确定的绳子曲线。

换句话说，$y=ax_3+bx_2+cx+d$中需要确定的未知数共有4个，即a、b、c、d。所以，我们至少需要取四个点才能确定这条曲线。这有点儿像“两点确定一条直线”。因为直线是由两点确定的，而且直线也可以理解为一次函数的图像。按照之前的说法，我们可以把直线视为一次样条线。那么，既然一次样条线(直线)需要两个点才能确定，三次样条线自然需要四个点才能确定。

对于股票走势图来说，这四个点的选择则极为关键。我们应该尽量选择在图像上转折较大处或极为关键的点代入标准方程。有一种“投机取巧”的方法，就是先选择四个点代入标准方程进行拟合，然后再选择第五个点，把它的横坐标代入拟合出来的曲线，并观察该点是否在曲线上。如果恰好在曲线上或者误差较小，则可以认为之前选择的四个点是合理的；如果误差较大或完全脱离拟合的曲线，则需要重新选择四个点。

但是由于在现实世界中，股市行情的变化与宏观经济的发展、法律法规的制定、公司运营的情况等息息相关，这导致我们很难把它抽象成一个能够用方程式表示的数学模型，所以接下来的内容都是在我们假想的理想形态的股票上进行讨论的。

我们假设有一只股票在某一段时间内的走势图可以用方程式

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+5$$

表示。那么如果本着最保险的思路(风险最小)，我们应该在什么时候买入该股票呢？

5.8　函数的单调性和驻点

我们要研究的理想股票走势图如图5-6所示。在讨论何时买入股票最保险之前，我们需要了解什么叫做函数的单调性。对于函数的图像来说，有些部分可能呈现出上升的趋势，有些部分可能呈现出下降的趋势，还有一些部分时而上升时而下降。这有点儿像是我们的股票走势图。

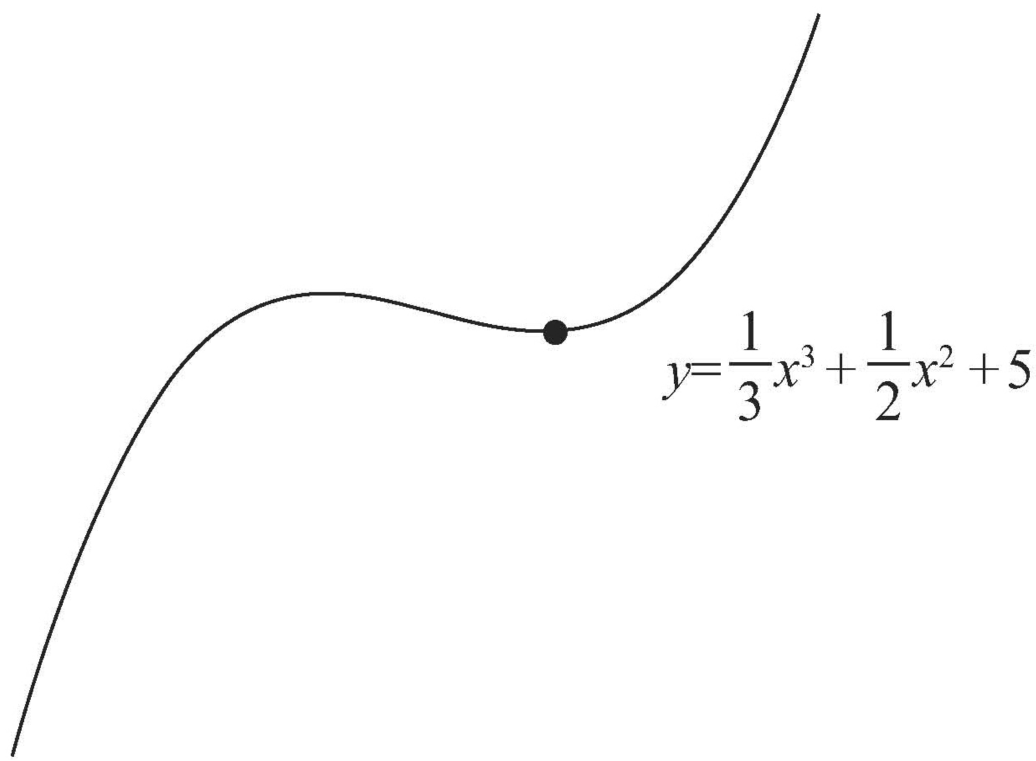


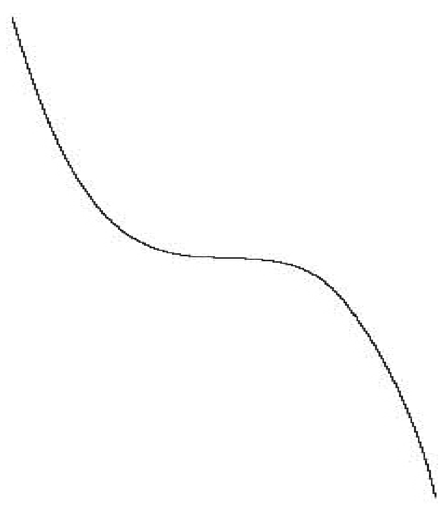
图5-6　理想股票走势图

如果图像在某一部分一直呈现出上升的趋势，这就对应着股票的上涨，我们自然要在股票呈现出这种趋势之前买入。相反，如果图像在某一部分呈现出下降的趋势，这就对应着股票的下跌，我们也需要在股票呈现出这种趋势之前卖出(抛出)。

我们都希望股市能够一直上涨，我们管这种一直上涨的现象叫做单调递增。字面意思就是不管增加的幅度如何，反正永远在增加。当然也会有我们不愿意看到的情况，即股市一直处于低迷的下跌状态，我们管这种状态叫做单调递减，也就是说一直在下跌、一直在减小的状态。

结合用一阶导数表示斜率的方法，那么当股票上涨的时候，其斜率应该大于0。也就是说，在我们拟合出的股票走势图所对应的函数曲线上，如果在某一点处它的斜率大于0，那么这只股票就在上涨，即单调递增。相应地，如果斜率小于0，就说明股市的下跌，即单调递减。

有时在上涨或下跌的过程中，会出现非常非常短暂的停留，类似于股市中的涨停或跌停。涨跌停板制度是为了防止交易价格的暴涨暴跌，但是这种短暂的停止不代表之后的股市不再上涨或下跌。这种现象可以 类比[注78]为函数中某一点的导数为0，但其前后相邻的点的导数都是正数或负数的情况。如图5-7所示，短暂的停留并没有改变函数整体下降的趋势。如果这种情况出现在股市中，就需要多加注意，因为其经常被误认为是可能反弹的点。我们称这些导数为0，又没有改变左右两侧函数图形变换趋势的点为驻点。



有了驻点的概念，就能解释为什么明明股市好像要反弹了，结果还是继续下跌的怪现象了。所以无论是数学上的函数还是真实的股票，遇到驻点都需要多想一想。

5.9　极值点

之前说过，如函数中某一点的导数为0，但前后相邻的点的导数都是正数或负数的情况，我们就称该点为驻点。相对于驻点，还有一种点叫做极值点。极值点处的导数也为0，但是它前后相邻点的导数符号是相反的，这种点对应着股市中“反弹的开始”和“下跌的开始”。

在数学中，“反弹开始”的点是极值点，另外它在数值上是较小的，所以该值叫做“极小值”；相似地“下跌开始”处的函数值为“极大值”。

对于由股票走势图拟合来的函数来说，它一定是连续的。如果你使用三次样条线对它进行拟合，那么它在某点的去心邻域内都是可导的。

这样一来，如果在某极值点左侧的导数大于零，其右侧的导数小于零，则该极值点是极大值点。对应着股票下跌的开始。

相反，如果在某极值点左侧的导数小于零，其右侧的导数大于零，则该极值点是极小值点。对应着股票反弹的开始。

如果我们总使用求三次一阶导数的方法，未免有些笨拙。这里我们讲解一种通过极限的性质推导出极值点的方法：

如果我们已经判断出函数的某一点的一阶导数为0，那么不妨把它的一阶导函数看成一个新的函数，再次求导。相当于求了函数在该点的二阶导数。如果二阶导数不为0，那么我们就可以继续进行下面的推导。

如果$f''(x_0)<0$，则有：

$$f''(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$

根据极限运算的性质，我们很容易推导出：

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$

已知该点的一阶导数为零，用数学的语言表达则为：

$f'(x_0)=0$

所以

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$

就可以被写成：

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

这样一来，我们就知道$f'(x)$和$x-x_0$在左右侧的邻域中的符号是相反的。当$x-x_0<0(x<x_0)$时，有$f'(x)>0$，即在极值点左侧的导数大于零。相似地，当$x-x_0>0(x>x_0)$时，有$f'(x)<0$，即在极值点右侧的导数小于零。而读者可以自行推导出$f''(x_0)>0$的情况。

最后，我们不难得到这样的结论：如果函数具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，则有：

当$f''(x_0)<0$时，函数在x_0点取得极大值；

当$f''(x_0)>0$时，函数在x_0点取得极小值。

所以，我们在计算过一阶导数之后，只需要再求出二阶导数，看函数在该点的二阶导数是大于0还是小于0，就可以判断在这点取得的是极大值还是极小值了。如果取得的是极大值，那么股票很可能会下跌，应该及时抛出。

5.10　更好的股票：凸凹性

到这里，有的读者可能会说：“我已经知道股票什么时候涨、什么时候跌了。”那么，凡是有可能涨的股票我都买，凡是有可能跌的股票我都抛(卖出)。但是，即使是这样也可能费力不讨好，不一定能赚到钱。一方面是因为股票的上涨或下跌受外界因素的影响较大。至于另一方面，则要比股票是在上涨还是下跌更为重要。

这就是股票上涨时正处在上涨的什么阶段，下跌时又处在下跌的什么阶段。如前所述，如果由股票走势图拟合出来的导数为$f(x)$。那么当$f(x)$的一阶导数$f'(x)$大于0的时候，此时股票是上涨的。但是有的股票虽然在

上涨，但是它已经快要到达开始下跌的转折点了。另一些股票则刚刚经历了反弹，目前它上涨的幅度还很小这种股票还能不能买？这些都是从一阶导数f′(x)中不能看出来的。

如图5-8所示，两条曲线交于A、B两点，但它们上涨的趋势显然是不同的。在前半段的时候，上方的曲线涨势较好，对应数学中的斜率较大。而在后半段，上方的曲线涨势不太理想，我们甚至可以预测，到了B点之后，原本处于上方的曲线可能会出现下降的趋势。所以如果在后半段买入了上方的曲线所代表的股票，那岂不是要赔本？

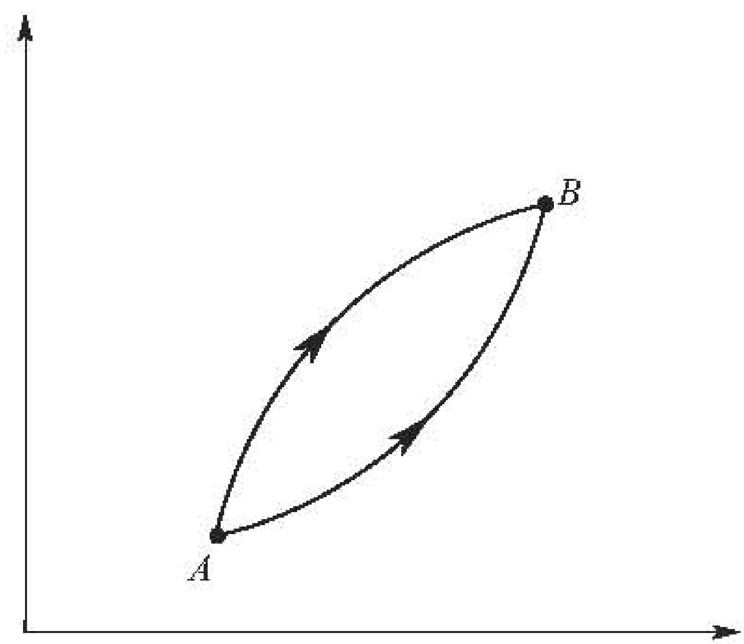


图5-8

上方的曲线到达B点之后到底会不会下降，决不能凭感觉而论，我们需要通过数学上的计算来证明这条曲线所代表的股票到底值不值得买。

这样一来，我们就引入了函数的另一个概念——函数的凸凹性和拐点。

如果说函数的单调递增代表股票的上涨，单调递减则代表股票的下跌，那么，函数的凸凹性和拐点则分别代表股票上涨或下跌过程中所处的阶段。

如图5-9所示，A是这段曲线中的一个极大值点，B是这段曲线中的一个极小值点。如果我们用x_A和x_B分别表示A、B两点的横坐标，则有：

$f''(x_A)<0$，$f''(x_B)>0$

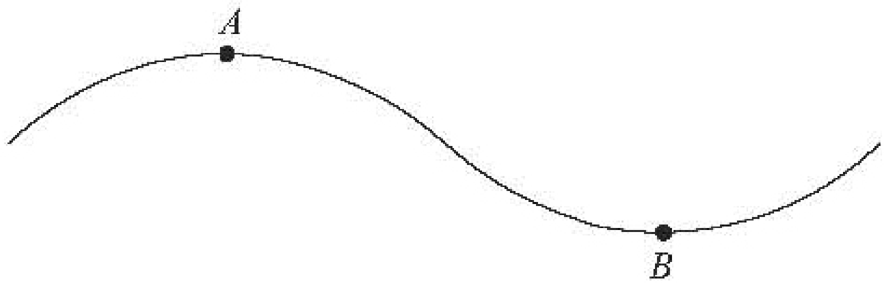


图5-9

这是用二阶导数判断极大值和极小值的方法确定的。如果某一函数有一阶导数和二阶导数，那么它的极大值附近的图像应该是凸出的。相应地，在极小值附近的图像则应该是凹陷的。

所以，即使不通过证明，我们也可以很清楚地看到：

当$f''(x_0)<0$时，函数在x_0点附近是凸的；

当$f''(x_0)>0$时，函数在x_0点附近是凹的。

如果你想知道为什么“当$f''(x_0)<0$时，函数在x_0点附近是凸的；当$f''(x_0)>0$时，函数在x_0点附近是凹的”，那么也非常简单，你只需要在草稿纸上画和图5-10一样的图就可以轻松证明了。

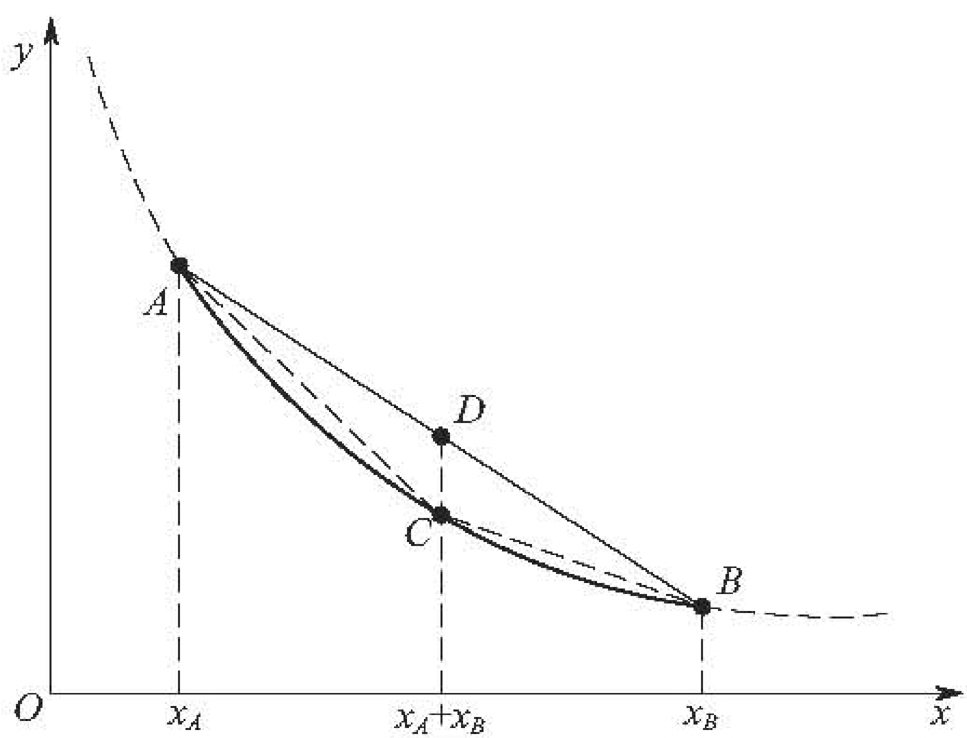


图5-10

$\overset{\frown}{ACB}$

是f(x)函数的一部分。如果想证明该函数在

$\overset{\frown}{ACB}$

这一部分是凹的，应首先连接A、B两点，再取这条线段的中点D。然后过中点向x轴做一条垂线，垂线与

$\overset{\frown}{ACB}$

相交于点C。这样一来，“证明函数f(x)在

$\overset{\frown}{ACB}$

这一部分是凹的”就被转换成了“证明点C的纵坐标小于AB中点D的纵坐标”。

如果把A点的横坐标用小写字母a表示，把B点的横坐标用小写字母b表示，C点的横坐标用小写字母c表示。根据我们在上一章学过的拉格朗日中值定理，就可以写出下列式子：

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'[a+k_1(c-a)]$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]$$

这里的k_1和k_2都代表一个在0到1之间的系数，它们和c组合在一起，表示的是在A→C和C→B这一段区间内的某个值，换句话说，这就是把拉格朗日中值定理的文字描述应用到了计算当中。

学视野

讲到这里，有的读者可能会好奇：“为什么根据拉格朗日中值定理就能写出来

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'[a+k_1(c-a)]$$

和

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]$$

这样的式子呢？”

之前提到的表示拉格朗日中值定理的式子是：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

当时我们需要特别声明：ξ是在a、b之间的某一个还没有确定的点。那么如果不使用ξ，又能不能表示拉格朗日中值定理呢？当然可以。我们只需要这样写就可以了：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+k(b-a)]$$

这里的k是在0到1之间的系数。当$k=0$的时候，就有$f'[a+k(b-a)]=f'(a)$；当$k=1$的时候，就有$f'[a+k(b-a)]=f'(a+b-a)=f'(b)$。这样一来，我们就可以用$a+k(b-a)$来表示$\xi$了。

由此，能够写出

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'[a+k_1(c-a)]$$

和

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]$$

这样的式子也就不稀奇了。

凸凹性判断方法

在上一节中，我们已经搞清楚了为什么有：

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'[c-k_1(c-a)]$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]$$

若C点在水平方向是中点这样的特殊位置，可知c-a＝b-c。如果将两个算式相减，可得：

$$\frac{f(a)+f(b)-2f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]-f'[c-k_1(b-c)]$$

对于等式右侧来说，f′[$c+k_2(b-c)$]-f′c[$-k_1(b-c)$]又是拉格朗日中值定理的形式，如果我们对其再次使用拉格朗日中值定理，上式就变为：

$$\frac{f'[c+k_2(b-c)]-f'[c-k_1(b-c)]}{b-c}=f''(x_0)(k_1+k_2)$$

因为k_1和k_2各自代表一个在0到1之间取值的系数，所以$k_1+k_2>0$。

而b-c＞0。所以当f″(x_0)＞0的时候，下式成立：

f′c[$+k_2(b-c)$]-f′c[$-k_1(b-c)$]＞0

由于：

$$\frac{f(a)+f(b)-2f(c)}{b-c}=f'[c+k_2(b-c)]-f'[c-k_1(b-c)]$$

可以推知：

f(a)+f(b)-2f(c)＞0

于是就有：

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}>f(c)$$

而且

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

表示的正是A、B中点的纵坐标，f(c)表示的也正是C点的纵坐标，故可以证明，“当$f''(x_0)>0$时，函数在x_0点附近是凹的”。

这样一来，根据股票走势图呈现出来的凸凹性，我们便能够判断出它到底是刚刚开始反弹，还是虽然在涨，但是已经快要达到极大值，马上就要一路下跌了。但股票具体是涨是跌，也不能只凭计算，还需要结合实践经验。

思考题

请试着使用拉格朗日中值定理证明“当$f''(x_0)<0$时，函数在x_0点附近是凸的”，并配合图5-11加以说明。

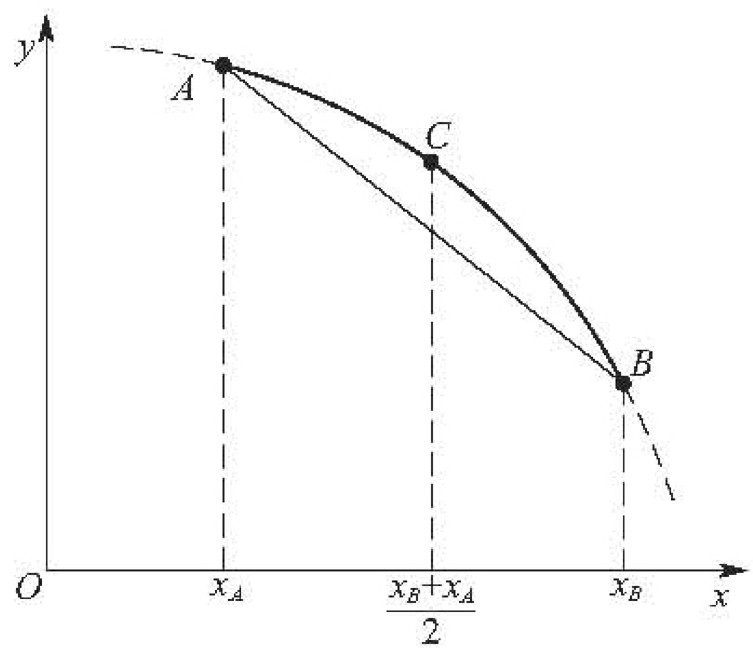


图5-11

蛋糕能分成多少块

如果有一个足够大的蛋糕，切一刀，最多可以分成两块；切两刀，最多可以分成四块；切三刀，最多可以分成八块……那么切四刀最多可以分成多少块？切N刀最多又可以分成多少块呢(图5-12)？

图5-12

第6章　桥洞的设计

6.1　从赵州桥说起

隋朝著名工匠李春(581—618)因设计并建造了赵州桥而名扬海内外。赵州桥建成于至今一千四百多年前的公元605年，是世界上现存最早、保存最完好的古代单孔敞肩石拱桥。迄今为止，赵州桥经历过了八次地震的考验，却依然安然无恙地屹立在清水河之上。这一章我们就来探讨一下，像赵州桥这样的单孔石拱桥的桥洞是如何设计的。

6.2　另外的拟合

我们可以把桥洞抽象成图6-1中的图形。但我们并不能像第5章那样拟合出这样一条曲线，因为这条曲线并非样条线。换句话说，对于这样一条曲线，我们并不能得知它上面任何一个点的坐标(因为桥洞的设计要在建造之前完成，所以我们认为准确的坐标是无法被测量的)。因此，我们可以通过另外的一种方法写出它大致的 解析式[注79]。

经过仔细地 观察[注80]，我们可以认为这条曲线的斜率是均匀变化的。它的斜率是从非常接近+∞(正无穷)的一个值一 直线性减小[注81]到非常接近-∞(负无穷)的另外一个值。如果把它的斜率变化写成函数的话则为：

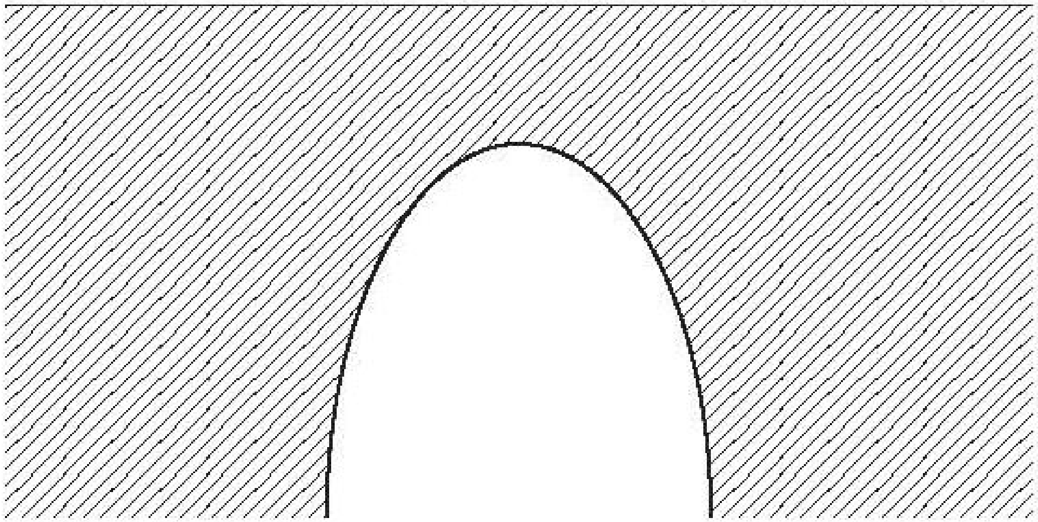


图6-1

$f(x)=kx$

为什么不是$f(x)=kx+b$而是$f(x)=kx$呢？因为一般来说，石拱桥的孔在正中间，并且桥洞最高处的斜率应该恰好是0，用生活中的语言来说，就是桥洞的最高处应该恰好是水平的。如果桥洞在正中间的话，那么b的值就恰好为零，所以省略不写。如果是类似于十七孔桥那样的多孔桥，就应该分别计算每一个孔，这时b的值不都为零，就要写成$f(x)=kx+b$。

这时我们就要做导数的逆运算，就是我们在第4章说过的，把导数反推回去的运算。这种运算叫做不定积分，用数学语言表达为：

$F(x)=\int f(x)dx$

上式的含义为$F'(x)=f(x)$。因此，虽然我们事先并不知道$F(x)$，但只要我们知道它的导数$f(x)$，就能反推出$F(x)$。此外，∫是计算不定积分的符号，只有一个∫[注82]是因为需要倒推的函数和原函数求一阶导数得来的，而dx是指之前求导时是对$F(x)$中的x求导数。以上介绍主要用于区分多元函数中的偏导数和偏微分。偏导数的情况在附录4中有简单的介绍，这里不再赘述。

我们可以按照第4章的思路，把$f(x)=kx$倒推回去，得到：

$$F(x)=\frac{k}{2}x^2+\text{任意常数}$$

这里引入了一个任意常数的概念，因为对任意一个常数求导后，结果都为零。所以，如果我们不写上任意常数，就会引起争议，为了更好地表示这种情况，我们就在已经倒推回去的式子后面加上一个任意常数，当然这个常数可以是正数，也可以是负数，还可以是零。因为每次都要写“任意常数”四个字太麻烦了，而微积分实际上是一种“懒人数学”，所以我们把“任意常数”写成字母C，于是上式就变为：

$$F(x)=\frac{k}{2}x^2+C$$

6.3　初识积分表

我们现在知道了不定积分就是把导数倒着推回去，积分是微分的逆运算。这样一来我们就可以顺利地从已知的导数公式推导出积分公式。下列13个公式是在计算过程中较为常用的。我们把由这13个公式构成的列表叫做基本积分表。

(1) $\int k\,dx = kx+C$（k是常数）

$$(2)\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1)$$

(3) $\int x^{-1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

$$（8）\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$（9）\int \csc^2 x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ (

12) $\int e_X dx = e_X + C$

$$（13）\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

由于指数运算和三角运算在之后的内容中也会经常用到，所以这一部分的积分表被收录到附录3中。这些公式大都是根据导数公式倒退回去的，无需再次验证就可以使用。

6.4　模块化的思维与不定积分定义推广

由不定积分的定义可以推导出不定积分的一条有趣而又实用的性质，首先，在不定积分中一定有F′(x)＝f(x)，换句话说，F(x)实际上是f(x)的原函数。将以上叙述写成不定积分的形式，则为：

∫f(x)dx＝F(x)+C，其中C是任意常数。

于是我们得知，∫f(x)dx是f(x)的原函数之一。为了使后续表达得更简单明了，“任意常数”常省略不写，如果为了追求严谨可以加上。

我们再对∫f(x)dx求导，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$$

看完这个式子，大家会恍然大悟：原来这先积分再求导，折腾来折腾去等于什么都没做啊！而下一步才是见证奇迹的时刻！我们在

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$$

两边同乘以dx，就可以得到：

d[f(x)dx＝f(x)dx

再改写为：

dF(x)＝f(x)dx

根据模块化的思维方式，我们可以将上式巧记为：

d[模块]＝[模块的导]dx

这里的“模块”可以是任意的表达式，也可以是同一表达式的导数。因此，上式也经常被我们写为如下形式：

df(x)＝f′(x)dx

6.5　积分公式证明

细心的你一定会发现这样一个事实：如果所有的积分公式都使用把导数倒推回去的方法进行推算，似乎是极为庞大的工作量。下面我们就来介绍两种推导积分公式的方法——第一类换元法和第二类换元法。

假如f(x_1)有原函数，它的原函数是F(x_1)，用数学语言可以表达为：

$F'(x_1)=f(x_1)$

如果用本章中的积分符号表示则为：

$\int f(x_1)dx_1=F(x_1)+C$

这时我们再假设x_1是中间变量，$x_1=g(x_2)$且$g(x_2)$可微。以下推导有点儿像是复合函数的求导过程，我们可以类比复合函数的求导，写出下面的数学表达式：

$\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2=F[g(x_2)]+C=\int f(x_1)dx_1$

到此我们可以认为，换元法是复合函数求导的逆过程。用数学语言表达则为：

$\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2=\int f(x_1)dx_1$

上式被称为第一类换元法，它经常被用于一眼就能被看出是否符合换元条件的复杂积分。但是有时我们一眼不能看出某个积分是否可以写成$\int f[g(x)]g'(x)dx$的形式，此时我们就需要用另外的一种换元法：

我们要把原本的$\int f(x)dx$转换为$\int f[g(x)]g'(x)dx$的形式。如果需要处理的积分是$\int f(x)dx$，我们就要设$x=g(x_0)$，但是这个$g(x_0)$不是随便设的。它需要满足一些前提条件，才能保证经过转换后的式子和原来的$\int f(x)dx$一模一样：首先，$g(x_0)$必须是单调可导的，这样我们才能进行转换；其次，$g(x_0)$不能是定值，因为原来的x是一个变化的量，所以让$g(x_0)$不能等于一个定值是为了保证转换前后保持一致。

这样一转换就变成了：

$\int f(x)dx=\int f[g(x_0)]g'(x_0)dx_0$

但是这样一来就出现了一个问题：我们之前是对x做积分，但是转换后的结果却是对x_0做了积分。不用着急，我们只需把$\int f[g(x_0)]g'(x_0)dx_0$中的$x_0$用$g(x_0)$的反函数$x_0=g_{-1}(x)$代回去就可以了。这就叫做第二类换元法。

6.6　积分表再扩展

如果你尝试自己推导附录3中的所有积分公式的话，就会发现这样三个问题：并不是所有公式都可以凭借换元法和倒推这两种方法推导出来；在计算的过程中总是会遇到这样或那样的不方便的情况；有时不得不计算类似$\int xdx_2$这样的积分式。所以我们接下来就要介绍一种真正能让积分计算变得简单的方法——分部积分法。

假如我们要计算的积分是$\int f(x)dg(x)$。我们首先要明确的是，$f(x)$和$g(x)$都是具有连续导数的函数。

接下来我们引入导数的乘法法则，则有$f(x)g[(x)']=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

移项后则有：

$f(x)g'(x)=[f(x)g(x)']-f'(x)g(x)$

这里本应该把导数的乘法法则反推回去，但是我们可以用一个小窍门来偷懒：我们只需要把两边求不定积分就可以了。于是上式就变成了：

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

经整理则有：

$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$

现在，我们来检验一下$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$的正确性。我们就拿$\int xdx_2$来举例。

如果不使用分部积分的方法，则应借助不定积分的性质：$df(x)=f'(x)dx$进行计算：

$$\int x\mathrm{d}x^2=\int x\cdot(x^2)'\mathrm{d}x=\int x\cdot(2x)\,\mathrm{d}x=\int 2x^2\mathrm{d}x$$

$$=2\int x^2\mathrm{d}x=2\cdot\left(\frac{1}{3}x^3\right)+C=\frac{2x^3}{3}+C$$

如果使用分部积分法，则有：

$$\int x\mathrm{d}x^2=x\cdot x^2-\int x^2\mathrm{d}x=x^3-\frac{1}{3}x^3+C=\frac{2x^3}{3}+C$$

由此我们不难发现，在微积分的领域中，解决同一个问题往往有多种方法。

思考题

想想看，像十七孔桥那样的多孔桥的桥洞应该怎样设计(图6-2)？假如河水的流速是v，那么一天之内将会有多少河水流过桥洞？

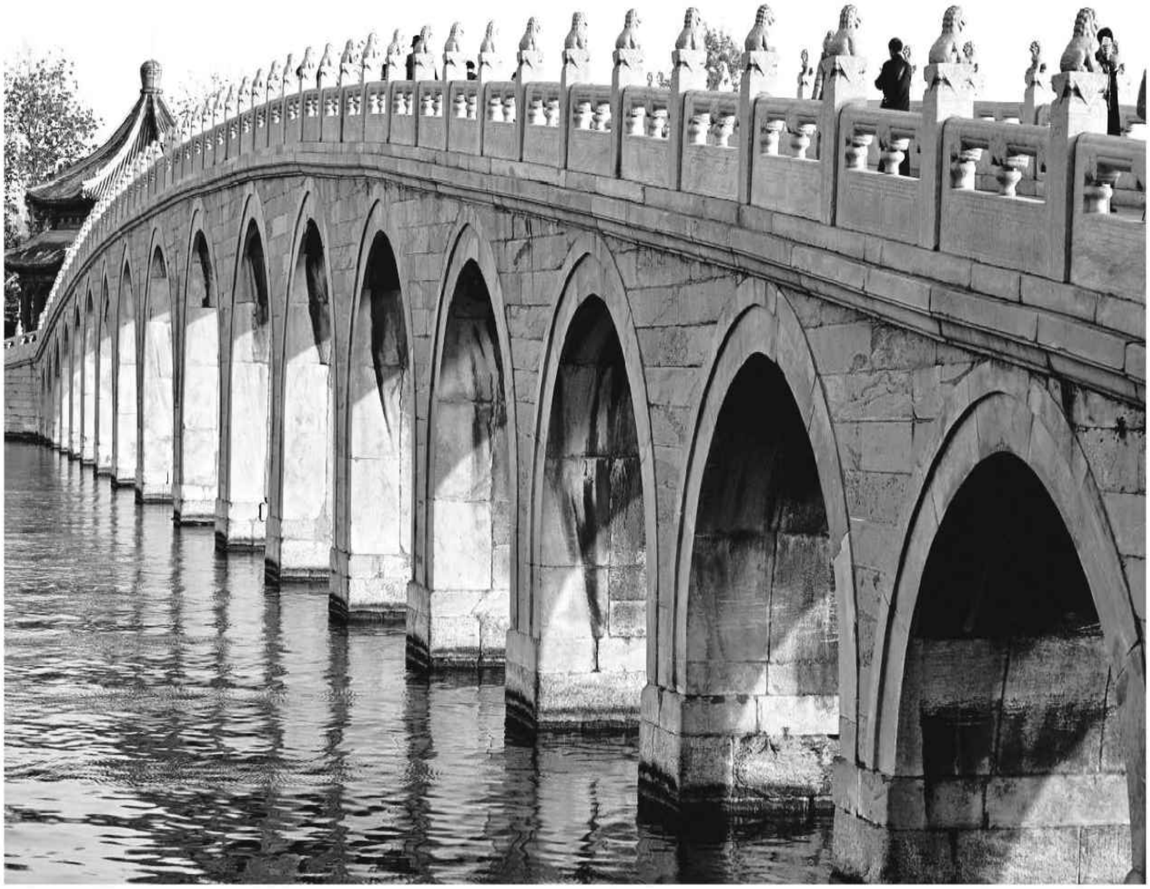


图6-2

数学视野

约翰·纳什(1928年6月13日至2015年5月23日)，著名经济学家、博弈论创始人(图6-3)。他先后担任过麻省理工学院助教、普林斯顿大学数学系教授，主要研究博弈论、微分几何学和偏微分方程。1994年，纳什获得诺贝尔经济学奖。

1957年，纳什和艾里西亚结婚。不幸的是，从1958年起，纳什开始有些精神失常。几年后，艾里西亚无法忍受在纳什的阴影下生活，决定和纳什离婚。但在离婚之后，艾里西亚并没有再婚，而是选择继续照料前夫纳什和儿子。1970 年，纳什辗转于几家精神病院，病情逐渐得到了控制。

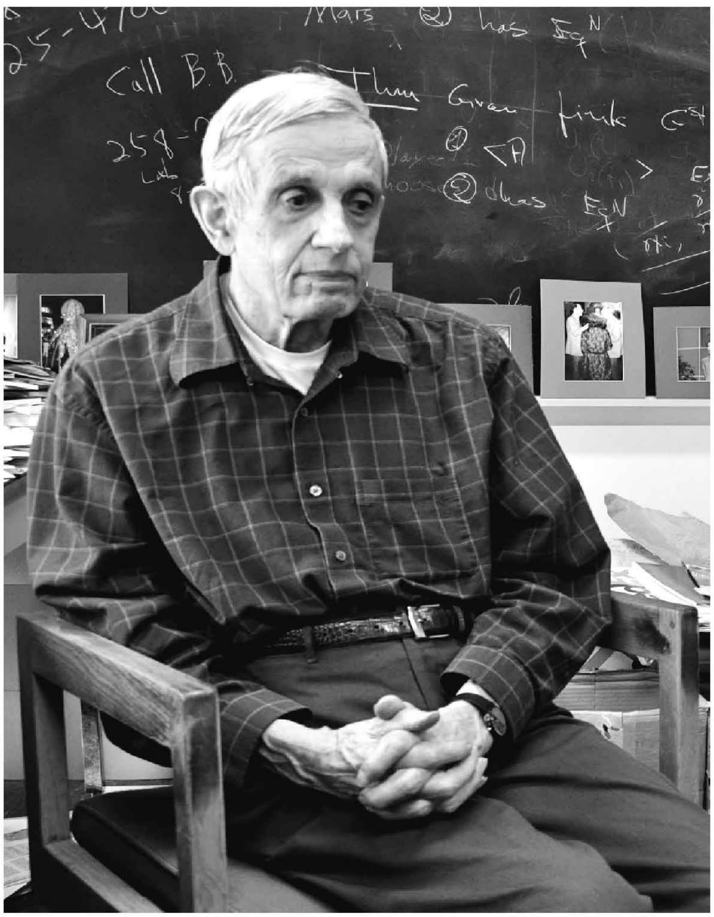


图6-3　纳什教授

到了20世纪80年代，纳什逐渐康复。后来在1994年，纳什和其他两位博弈论学家(约翰·C·海萨尼和莱因哈德·泽尔腾)共同获得了诺贝尔经济学奖。

2001年，患难与共的艾里西亚与纳什选择了复婚，但好景不长，在2015年5月23日，纳什夫妇遭遇车祸，双双去世。

如果大家想了解纳什的生平事迹，可以欣赏影片《美丽心灵》。该影片以纳什为原型，讲述了他虽然患有精神疾病，却能够在博弈论和微分几何学领域潜心研究，最终获得诺贝尔经济学奖的感人故事。

■ 一题多解

有这样一个问题，即求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

的值。解决该问题常规方法应该是使用第4章中介绍过的泰勒展开对该式进行变形。泰勒展开为：

$$f(x)=\frac{x_0}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(x_0)}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

即把cos(sinx)和cosx都代入泰勒展开求出近似值，然后再进行计算。

但是这种方法对于初学者来说过于复杂。如果说泰勒展开是把窗户关上来避免噪声的方法，那么使用洛必达法则就可以说成是和工人们商量来达到目的两全其美的方法。虽然使用洛必达法则与和工人们商量一样，都需要费一些“口舌”，但是它的效率和直观则使其受到了普遍的认可和欢迎。

首先，洛必达法则可以表示为：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

这是我们在学习不定积分之前的洛必达法则的表达式。在该式中，f(x)和F(x)代表两个完全不同的函数。然而，在学习过不定积分之后，F(x)通常用于表达f(x)的原函数。但在洛必达法则的表达式中，F(x)并不一定是f(x)的原函数。所以，我们通常把F(x)写成g(x)的形式以示区别。

这样，洛必达法则的表达式就变成了：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

是零比零的类型。而对此类极限来说，我们就没法直接算，此时就需要将其转化，直到转化成不是零比零型之后，再把x→0代入式子这样才能直接计算。

因此，对于

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

我们就可以这样来设：设

f(x)＝cos(sinx)-cosx

g(x)＝x_4

我们很容易就会发现，g(x)在求四阶导数之后是一个常数，这样一来

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

就不是零比零型了。所以，

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

就可以被转化成：

$$\frac{1}{24}\lim_{x \to 0} f^{(4)}(x)$$

到这里，大家可能会有两个疑问：一是为什么$g_{(4)}(x)=24$；二是为什么

$$\lim_{x \to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

可以写成

$$\frac{1}{24}\lim_{x \to 0} f^{(4)}(x)$$

实际上，这两个问题在第2章已经有过一定的介绍。但是这的确是我们第一次遇到高阶导数。所以，让我们一起来看看如何求高阶导数。

高阶导数的求法和第2章中介绍过的一阶导数的求法是一样的。简而言之，二阶导数就是把一阶导数当成一个函数再次求导，三阶导数就是把二阶导数当成一个函数再次求导，四阶导数就是把三阶导数当成一个函数再次求导，以此类推。N阶导数就是把N-1阶导数当成一个函数再次求导。

这样一来就有$g_{(4)}(x)=[g'''(x)']$，$g'''(x)=[g''(x)']$，$g''(x)=[g'(x)']$。也就是说，我们只需要对g(x)连续求四次导数就可以了。因为$g(x)=x_4$，所以有：

$g'(x)=4\cdot x_3$

$g''(x)=4\cdot 3\cdot x_2=12\cdot x_2$

$g'''(x)=12 \cdot 2 \cdot x=24x$

$g_{(4)}(x)=24$

到此，我们已经明白为什么$g_{(4)}(x)=24$了。现在还有另一个棘手的问题，就是为什么

$$\lim_{x \to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{24}\lim_{x \to 0}f^{(4)}(x)$$

。

这个问题实际上比第一个问题还好解决，只要回顾一下第4章末尾介绍洛必达法则的部分，就会发现其中的奥秘。因为洛必达法则除了可以写成

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

之外，在把求出的一阶导数当成原来的函数再次求导时，洛必达法则依然适用。所以在对g(x)求四阶导数后，该极限不再是无法计算的零比零型了。同时，我们也要对f(x)求四阶导数。这样一来，由于$f(x)=\cos(\sin x)-\cos x$，$g(x)=x_4$，我们就可以把

$$\lim_{x \to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

写成

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

。如果不习惯$f(x)=\cos(\sin x)-\cos x$和$g(x)=x_4$这样的数学表达，还可以改用文字描述为：

用f(x)代替cos(sinx)-cosx，并用g(x)代替x_4。

所以该极限可以进一步写成：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)}$$

又因为$g_{(4)}(x)=24$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{24}$$

此外，根据极限的运算规律，我们可以把常数部分“拿出来”。这样该式就变成了：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}f^{(4)}(x)$$

现在我们就只需要求$f_{(4)}(x)$就可以了。首先要观察f(x)的特点：

f(x)＝cos(sinx)-cosx

根据导数运算的加减法则可知：

$f_{(4)}(x)=[\cos(\sin x)]_{(4)}-\cos_{(4)}x$

显然，$\cos[\sin(x)]_{(4)}$是比较复杂的，而$\cos_{(4)}x$则比较简单。为了避免写一个非常长的式子把自己绕晕，我们先来计算$\cos_{(4)}x$，以让它别“瞎捣乱”。

cos′ x＝-sinx

cos″ x＝-cosx

cos‴x＝sinx

$\cos_{(4)}x=\cos x$

这样导来导去反而倒回来了。因为导数的运算中的加减法则实际上是从有极限运算中的加减法则中得来的，所以我们就可以把之前的式子再次简化：

$$\frac{1}{24}\lim_{x\to 0} f^{(4)}(x)=\frac{1}{24}\{\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{(4)}-\lim_{x\to 0}\cos^{(4)}x\}$$

$$=\frac{1}{24}\{\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{(4)}-\lim_{x\to 0}\cos x\}$$

$$=\frac{1}{24}\{\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{(4)}-\cos(0)\}$$

$$=\frac{1}{24}\{\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{(4)}-1\}$$

接下来只需要计算比较复杂的[cos(sinx)]$_{(4)}$。实际上只要找对方法，这部分的计算也不算特别困难。

首先要求cos(sinx)的一阶导数。它的一阶导数应该被写成：

[cos(sinx)]′ =-sin(sinx)·cosx

对该部分求导之后，会有一个非常明显的乘法，这显然是由于运用了复合函数的求导法则所导致的。在求高阶导数的过程中，最让人兴奋的就是遇到能够写成乘法的部分，这样一来我们就能使用导数的乘法运算法则了。

导数的乘法法则除了(uv)′ =u′ v+uv′ 还有：

(uv)″ =u″ v+2u′ v′ +uv″

(uv)‴=u‴v+3u″ v′ +3u′ v″ +uv‴

这里可以类比(a+b)$_2$=a$_2$+2ab+b$_2$和(a+b)$_3$=a$_3$+3a$_2$b+3ab$_2$+b$_3$来进行理解。在高阶导数的乘法中，这个类似于完全平方公式的公式叫做莱布尼茨公式。高阶的完全平方公式写成：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

这里只需要把平方改成高阶导数，把a+b改成ab，就成了：

$$(ab)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{(n-k)}b^{(k)}$$

式中，$a_{(0)}$表示对a不求导的意思。相似地，$a_0=1$，但是在完全平方公式中一般忽略不写。$b_{(0)}$和b_0也是相似的情况，这里不再赘述。

所以接下来就可以把[-sin(sinx)·cosx]‴写成：

[-sin(sinx)·cosx]‴ = [-sin(sinx)]‴cosx+3[-sin(sinx)″]cos′x+3[-sin(sinx)′]cos″x+[-sin(sinx)]cos‴x

现在，我们先计算cos′x、cos″x和cos‴x，因为这部分比较好算。我们之前在求cosx的四阶导数时已经求过了：

cos′x=-sinx

cos″x=-cosx

cos‴x=sinx

所以[-sin(sinx)·cosx]‴就变成了：

[-sin(sinx)·cosx]‴ = [-sin(sinx)]‴cosx+3[-sin(sinx)″]·(-sinx)+3[-sin(sinx)′]·(-cosx)+[-sin(sinx)]·sinx

这时候要使用一个小技巧，说起来也很简单，就是利用极限运算的性质，先计算x→0时的cosx、-sinx、-cosx和sinx。这样一来，因为-sin0和sin0的值都是0，所以[-sin(sinx)·cosx]‴一下就少了两项；又因为cos0=1，-cos0=-1，于是我们又可以减少工作量了。

经过整理之后，我们就会得到：

[-sin(sinx)·cosx]‴=[-sin(sinx)]‴-3[-sin(sinx)′]

现在可以去算[-sin(sinx)]了：

[-sin(sinx)′]=-cos(sinx)·cosx。

这时候再次使用之前用过的技巧，得到：

-cos(sin0)·cos0=-cos0·cos0=-1·1=-1

这样一来，

[-sin(sinx)·cosx]‴=[-cos(sinx)·cosx″] +3

这时不要忘记，[-sin(sinx)·cosx]‴只是原式的一小部分，之前我们一直丢下了个$\cos_{(4)}x$在x→0时的值-1没管它。现在可以把它添上了，即：

原式＝[-cos(sinx)·cosx″]+3-1＝[-cos(sinx)·cosx″]+2

我们发现再次出现乘法的部分，此时又可以套用莱布尼茨公式了，这次我们要使用的是(uv″)＝u″v+2u′v′+uv″，有：

[-cos(sinx)cosx″] ＝ [-cos(sinx)″]cosx+[-cos(sinx)′]cos′x+[-cos(sinx)]cos″x

接下来还是要先算cos′x和cos″x，因为它们比较好算：

cos′x＝-sinx

cos″x＝-cosx

然后我们重复刚刚的步骤，再次利用极限运算的性质进行计算。

-sin0＝0

cos0＝1

-cos0＝-1

此时原式＝[-cos(sinx)″]+cos(sinx)+2，这里再次利用极限运算的性质，先算x→0时的情况，就有cos(sin0)＝cos0＝1。

于是：

原式＝[-cos(sinx)″]+3。

由于[-cos(sinx)′]＝sin(sinx)·cosx

[-cos(sinx)″]＝cos(sinx)·cosx·cosx+sin(sinx)·(-sinx)

这下只剩下x→0的情况没算了，于是有：

cos(sin0)·cos0·cos0+sin(sin0)·(-sin0)＝cos0·1·1+0＝1

最后，原式＝1+3＝4，即

$$\lim_{x\to 0} f^{(4)}(x)=4$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0} f^{(4)}(x)=\frac{1}{6}$$

一直以来，我们认识到的数的范围是实数范围。但是在实数范围之内，仍然有我们不能解释的数学问题和数学现象。其中一个现象就是，我们不能计算出方程$x_2=-1$的解。正因为如此，我们才需要将数的范围再次扩大，如图6-4所示。

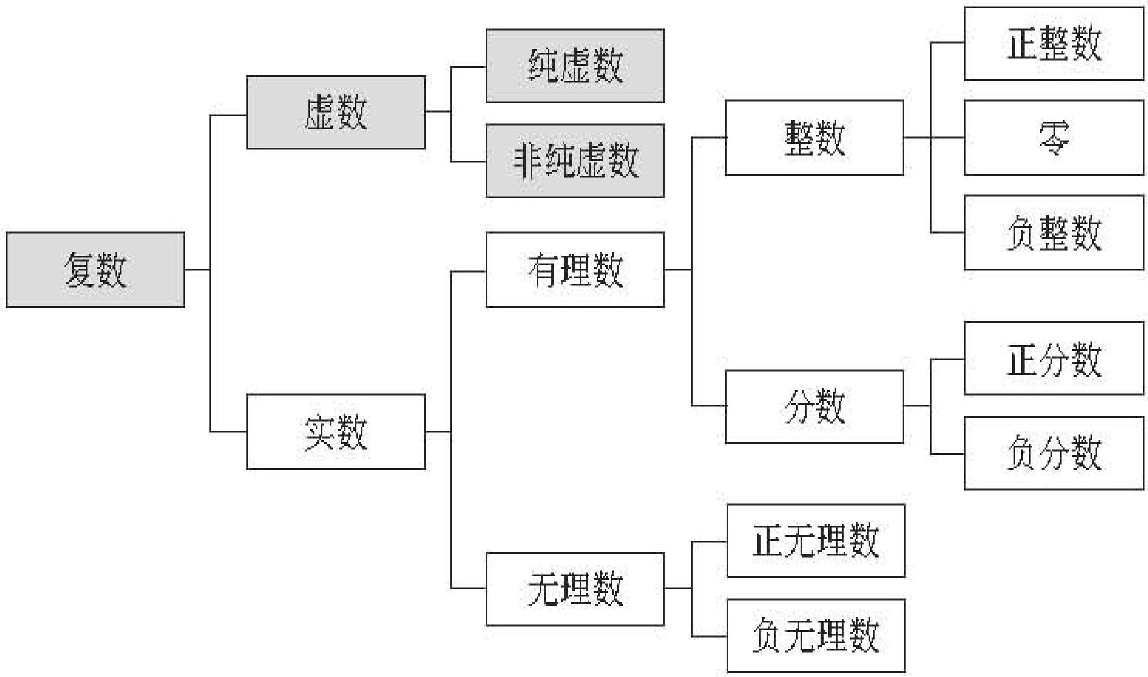


图6-4　数的范围

我们把方程$x_2=-1$的解的值称为虚数。它的字面意思就是不清楚的数。由虚数和实数构成的数的范围叫做复数。我们在初中时就学过，所有的实数可以用一条数轴来表示。虽然虚数和实数是不同的情况，但是我们也可以用一条特殊的数轴来表示所有的虚数。由于复数包括实数和虚数两个部分，所以要用实数的数轴和虚数的数轴共同表示。正因需要两条数轴来表示一个准确的数字，所以由两条数轴交叉得到的，就是一个用于表示复数的平面。我们把这个平面叫做复平面。

由于用“$x_2=-1$的解的值”这种表述不太方便，所以我们就用字母i来表示虚数。比如，

$$2i=2\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-4}$$

需要注意的是，因为虚数是不清楚的数的意思，所以虚数之间只能比较是否相等，不能比较大小。

所有的复数都可以表示为a+bi(a、b都是实数)。如果b＝0，这个数就是实数；如果a＝0，b≠0，这个数就是纯虚数；如果a≠0，b≠0，这个数就是非纯虚数。

如果有甲、乙两个复数a+bi和c+di(a、b、c、d都是实数)。它们的四则运算应为：

甲+乙＝(a+bi)+(c+di)＝a+bi+c+di＝(a+c)+(b+d)i

甲-乙＝(a+bi)-(c+di)＝a+bi-c-di＝(a-c)+(b-d)i

计算复数的减法时应该特别注意，-(c+di)＝-c-di，而不是-(c+di)＝-c+di。

甲×乙＝(a+bi)×(c+di)＝ac+adi+cbi+bdi_2＝ac+(ad+cb)i-bd＝(ac-bd)+(ad+cb)i

因为i_2＝-1，所以bdi_2＝-bd，由此，上式可以简化为：

甲×乙＝(ac-bd)+(ad+cb)i

$$甲\div乙=\frac{甲}{乙}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-d^2i^2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

对上式的简化方法叫做乘以共轭复数。如果有一复数是a+bi，那么它的共轭复数就是a-bi，或者说a+bi和a-bi互为共轭复数。

复数和复平面在复变函数等领域应用广泛。深入地了解复数有助于大家更好地学习和了解高等数学。

第7章　做一件大褂需要多少布

7.1　DIY的潮流

大褂也叫长衫，本来是清朝时期汉族人根据满族旗装加以改良而成的有民族特色的服装。随着“Do It Yourself(自己动手做)”的兴起，自己做点心、自己钉一个工具箱之类的事情越来越普遍了。如果想要DIY一件大褂怎么做呢？需要用多少布呢？在这一章中，我们就要讨论做一件大褂和定积分的关系。

7.2　再探不定积分

在上一章中我们已经讨论过不定积分。不定积分的 抽象式[注83]可以写成：

$F(x)=\int f(x)dx$

这里的F(x)是函数f(x)的原函数。换句话说，f(x)是F(x)的 导数[注84]，用数学语言表达成：

$F'(x)=f(x)$

这样一来，如果我们令y＝F(x)，则有：

$F(x)=\int F'(x)dx$

$y=\int y'dx$

一直以来我们都在使用拉格朗日的表示方法，即在函数上面加一个撇来表示导数。比如把y的导数记作y′，把f(x)的导数记作f′(x)，等等。现在我们要使用之前介绍过的另一种导数的表示方法—— 莱布尼茨的导数表示方法[注85]，即把y的导数(对自变量x求导)表示为

[img123-1.jpg″ class='imgINp'/>

这样一来，不定积分的抽象式就可以表示为：

$$y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

这里，像“∫函数d某自变量”这样的抽象化的表达式是把函数当成原函数对某自变量求导后的结果，根据函数和某自变量这两个已知信息倒推回去的算式。

实际上，∫本身就是一种运算符号，它的 运算优先级[注86]较低。∫是由英语单词中的 Summation[注87]的首字母S演变而成的数学符号。它的意思是对其后方的表达式进行求和。

实际上，

$$y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

中省略了乘号，如果不省略乘号的话应该表示为

$$y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x$$

这样一来，由于∫的运算优先级低于乘法，所以应该先算乘法的部分，就有：

∫y＝∫dy

之前在第2章中提到过，导数表达的是把函数的图像分割成非常小的小段后，被认为是直线的小段的斜率。那么根据莱布尼茨的表示方法，斜率可表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

这就是非常小的小段中的纵向的差比 横向的差[注88]~~的~~意思。而这里的d就是非常小的小段的意思。

这样一来我们就把不定积分的符号解释通了，y自然可以表示为先把它自己分割成非常小的小段(因为y是纵向的，所以分割成的小段是纵向的小

段)，再将这些小段进行求和。这就是不定积分的本质，我们可以将其理解为把已经被分割成小段的东西进行求和。但是这个小段不是已知的。而如果我们已知这个小段的斜率，又因为斜率是纵向的差比横向的差，所以只需要用这个小段的斜率乘以横向的小段就可以得到纵向的小段。这样一来，再对纵向的小段进行求和可以得到y了。

7.3　常数C可写可不写吗

有些教科书中说，求不定积分之后常数C可写可不写。在高等数学领域，这可以说是一种常见的误区。一般来说，除特殊需要外，都需要在不定积分的结果后写上+C或者注明结果省略常数项。

本书为了便于讲解，所以有时候会省略常数项。但这并不代表常数项不存在。这种省略有一点儿像是把a・b表示为ab，而乘法是仍然存在的。但是在较为正式的论文中，常数项一般来说是不能忽略的。

7.4　从不定积分到定积分

我们刚刚已经讲过不定积分是怎么来的了，那么不定积分到底表示的是什么呢？有的读者说了，之前不是一直说不定积分表示的是原函数吗？那么要把不定积分画在坐标系里又应该怎么表示呢？

图7-1中的左图所示为一个一元函数，右图则是将该函数的图像的横坐标分成许许多多等长的线段，然后按照这些线段的横坐标所对应的纵坐标的值画出矩形。如果这些线段越分越多，分到之前一直说的“还没来得及改变的小段”的程度我们就说该线段的长度趋近于0，用数学语言表述就是x→0。

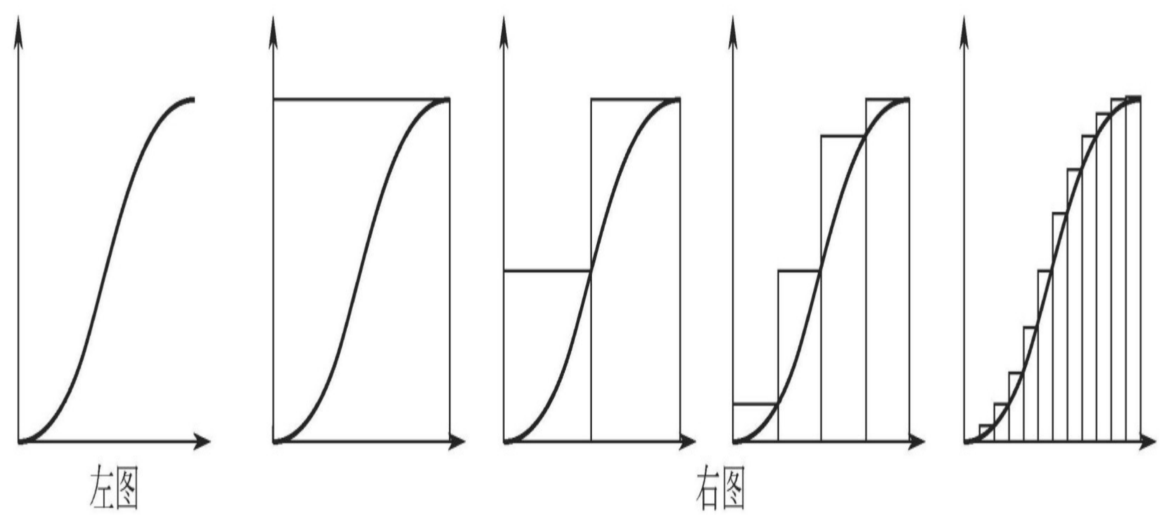


图7-1

那么当这个小段的长度趋近于0的时候，就可以用dx来表示它在水平方向上的长度。相应地，它垂直方向上的长度就要写成dy。如果x→0，换句话说就是函数的图像被分成了无穷多的小段，它在横向上的长度很接近没有了，但还不完全是0的状态，我们就可以认为它只有纵向上的长度。

如图7-1中的右图所示，分的段越多，那么这些小矩形的面积的和就越趋近于该函数的图像和x轴围成的面积。当该函数被分了无穷多的小段，横向的长度可以被忽略的时候，那么这个面积和就可以看作函数的图像和x轴围成的面积。

此外，当该函数横向上的长度趋近于没有的时候，我们就可以认为它只有纵向上的长度。所以它纵向上的长度的和就可以视为函数的图像和x轴围成的面积。也就是说，$\int dy$就是此时图像和x轴围成的面积。

但是一般来说，不定积分都是无穷无尽的，就像求面积，求一个两端能无限延展的面的面积是没有意义的，这就像求一条两端能够无限延长的线的长度是没有意义的一样。

所以我们就发明了定积分。定积分就是不定积分的一个片段，它限制的是自变量。在图7-2中，该定积分的范围对应着横坐标。而图7-2的灰色部分就是定积分的图示。定积分的抽象式可以写成：

$\int_{ab}f(x)dx$

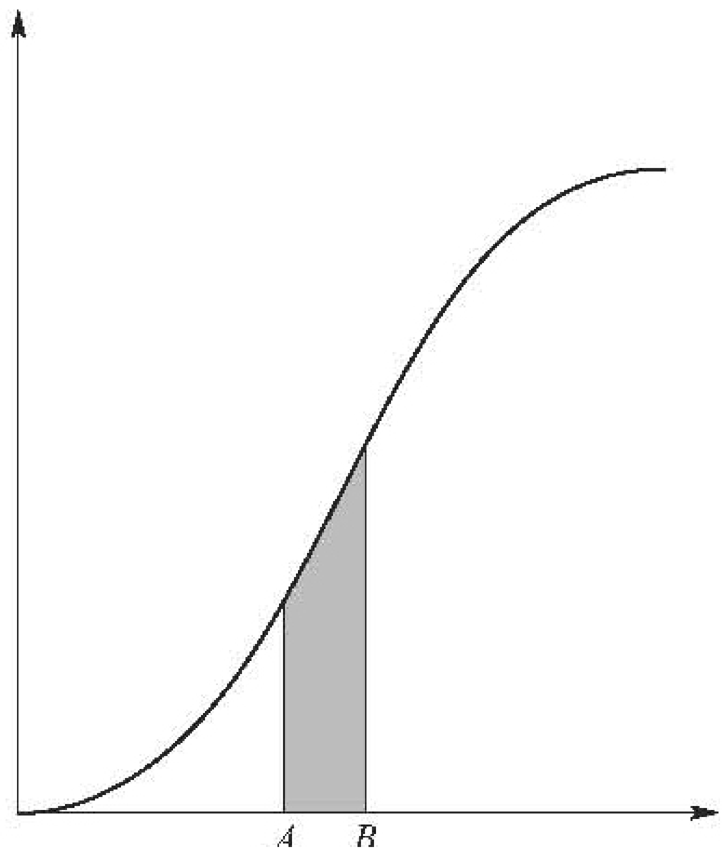


图7-2

这里的a、b分别表示图中A点和B点的横坐标。以后，像图7-2中那样的灰色部分的面积，我们都可以用$\int baf(x)dx$来表示。在该式中，a为积分下限，b为积分上限。

如果我们每次都使用逐一求每个点的值然后再加和这样的笨办法，那实在是太麻烦了。若是函数稍微复杂一点儿，我们就束手无策了。所以牛

顿和莱布尼茨两位伟大的 数学家[注89]发明了牛顿-莱布尼茨公式，来帮助我们求解定积分。

牛顿-莱布尼茨公式可以写成：

$\int_{ab} f(x)dx = F(b) - F(a)$

牛顿-莱布尼茨公式的推导过程较为复杂，所以我们用一种更为简单的方法进行“想象证明”。需要注意的是，这种“想象证明”并不是严谨的数学证明，只是为了方便理解牛顿-莱布尼茨公式而创造的一种证明方法。因为牛顿莱布尼茨公式已经在三百多年前被牛顿和莱布尼茨两位数学大师证明过了，所以这里才能使用这种想象证明的方法。

想想看，如果没有积分下限的话，定积分会变成什么样子，它会不会变成图7-3中的样子呢？

在 没有积分下限[注90]的前提下，这个想象出来的式子，如果能用图7-3中的图像表示的话，那么就可以认为它是在竖直方向上无法延伸的纸片。本来这张纸片在水平方向上是可以向左右两端延伸的，但此时它在积分上限(B点横坐标的位置)被剪了一刀，这样一来，其右端就不能再延伸了，只能向左端延伸。

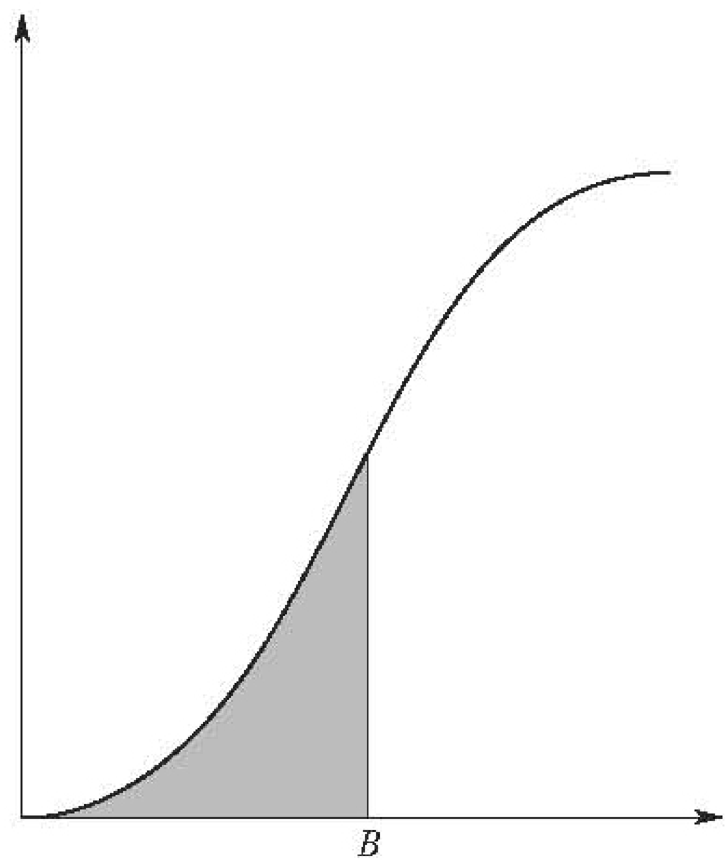


图7-3

F(b)的情况如此，F(a)的情况也可以说是一模一样，那么F(b)-F(a)可以视为两个纸片面积的差。虽然这两张纸片的左端都是可以无限延伸的，但实际上从较左的 某一点[注91]开始，它们是可以对齐的，这样一来这个差值就是确定的了，即相当于在某一点(A点的横坐标)处再次剪断F(b)表示的纸片。到此，我们就可以得到$\int_{ab}f(x)dx$表示的面积了。

这样一想，牛顿莱布尼茨公式也没有多难。但是这毕竟不是严谨的数学证明。需要特别注意的是，“想象证明”，只能用于解释被前人严谨证明过的公式和定理，而不能用于研究新的公式或定理。这有点儿像是我们在第3章中学过的“假说演绎法”。

不管怎样，你现在已经了解牛顿莱布尼茨公式了。当然，你也需要记住它的抽象表达式，毕竟没人愿意每次使用公式之前都证明一次。如果你不记得了，那么就请一边回忆“想象推导”的过程，一边牢记牛顿莱布尼茨公式的抽象表达式：

$\int_{ab}f(x)dx=F(b)-F(a)$

7.5　加法的方向

读到这里，你有没有这样的疑问：为什么已经有了Σ(西格玛)作为求和的符号，莱布尼茨先生还要发明∫这样的符号表示求和呢？另外，为什么已经有了Δx和Δy来表示非常短的小段，莱布尼茨先生还非要多此一举地发明dx和dy来表示同一概念呢？有些教科书上说，和Σ(西格玛)配合使用的符号是Δx和Δy，和∫ 配合使用的符号是dx和dy。但实际情况并不是这样的，而是一个加法的方向和宏观视角与微观视角的问题。

我们先来聊聊宏观视角和微观视角的问题。首先，Δx和Δy表示的是宏观上的差。虽然它的长度非常短，但是我们还是认为，只要有一把足够精确的尺子就能量出它的长度。这个概念就是宏观上的差。

但是对于莱布尼茨先生发明的符号——dx和dy，它们表达的是微观上非常短。我们无论把尺子做得多么精确，都不能测量出它的长度。

下面我们来讨论Σ和∫的区别。这两个符号都表示累加，有一种简单的想法是：Σ是宏观的累加，∫是微观的累加。但如果∫是微观的累加的话，就没有办法解释像∬和∭这样的符号了。

因此，只有从加法的角度分析才能说得通Σ和∫的区别。Σ是像图7-4中所示的在一维方向上的横向累加，而∫是在二维平面上的累加，如图7-5所示。所以在几何上，Σ的结果表示的是长度。而∫的结果表示的是面

积。只有按照这样的思路解释，等到函数扩展到三维甚至四维空间时，这些符号的概念才能被说清楚。

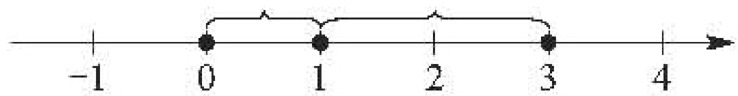


图7-4

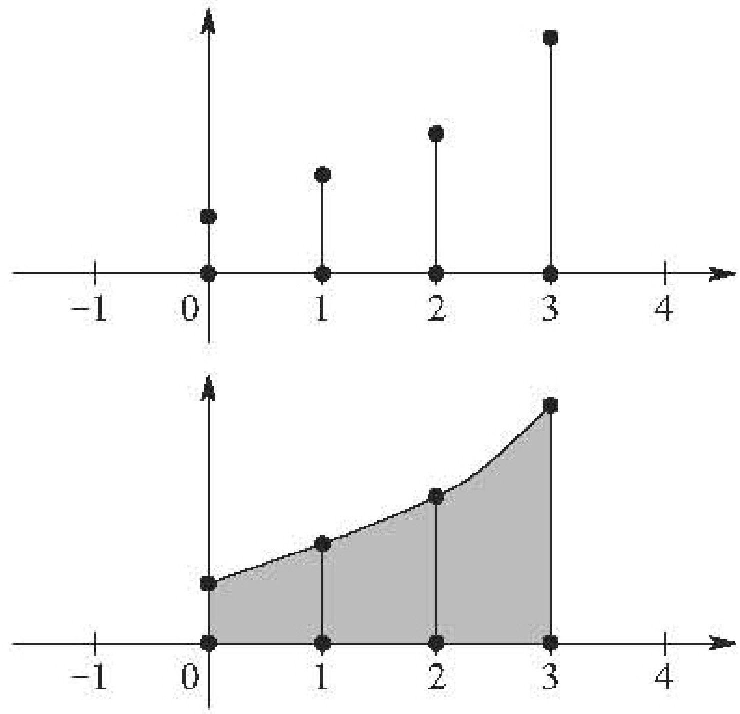


图7-5

如果我们在图像上考虑的话，我们可以把需要的概念加的值想象成一些小木棍。Σ(西格玛)的加是把这些小木棍首尾相接绑在一起，求它的长度。而∫的加则是把它们并排绑在一起，求它的面积。

换句话说，由于一维是直线，所以累加的结果是长度；二维是平面所以累加的结果是面积；而三维是空间，累加的结果应该是体积。对于四维及四维以上的维度，不属于本书讨论的范围，但就现在普遍的认识，一般认为四维是时空，它的累加比较难以想象。

7.6　过去的面积公式

也许你从来都没有想过你熟知的几何图形的面积公式是怎么来的。比如，矩形的面积为什么可以表述为长乘宽，而不是像菱形那样把对角线的

值相乘再除以2呢？如果你对这个问题也是“丈二和尚摸不着头脑”。那么我们现在就站在定积分的高观点上，给这些我们熟知的面积公式一个更合理的解释。

首先回忆一下在学习定积分之前我们是如何学习求面积的。我们最早接触的就是求矩形的面积。

我们把一个边长为1的小正方形的面积称为单位面积。换句话说，我们规定一个边长为1的小正方形的面积是1。而我们在没有学习定积分之前的面积公式都和这个边长为1的代表单位面积的小正方形相关。

任意一个 矩形[注92]都可以被看成在长的方向上把这个小正方形扩大成

$$\frac{长}{1}$$

倍，在宽的方向上把这个小正方形扩大成

$$\frac{宽}{1}$$

倍。那么，任意一个矩形的面积都可以表达为：

$$单位面积\times\frac{长}{1}\times\frac{宽}{1}$$

单位面积是1，因此乘以1和除以1都可以省略不写，这样就得到了矩形面积的公式：

矩形＝长×宽

7.7　高观点下的面积公式

现在我们就来站在定积分的高观点上，给这些我们熟知的面积公式一个更合理的解释。

如果我们要用定积分表示面积公式，为了方便使用数学语言，我们设矩形的长为a、宽为b，则用定积分表示的矩形面积可以写成：

S矩形＝$\int_{0a}f(x)dx f(x)=b$

进一步可以写出：

$S_{矩形}=\int_{0a}f(x)dx=F(a)-F(0)\quad F(x)=bx+C$

$S_{矩形}=F(a)-F(0)=(b\cdot a+C)-(b\cdot 0+C)=b\cdot a+C-0-C=b\cdot a$

根据乘法的交换律，则有：

$S_{矩形}=ba=ab$

这样一来我们就明白为什么矩形的面积可以表示为长乘宽了。

7.8　再探圆和椭圆

和求矩形的面积公式时一样，我们可以用一个函数来表示一个图形的全部或者一部分，然后对它求定积分，进而推导出它的面积公式。

相似地，我们还可以用同样的方法来证明圆和椭圆的面积公式。之前在第5章中，我们已经了解了圆的方程，即：

$x_2+y_2=r_2$

接下来，我们取第一象限的圆来证明圆的面积公式。需要特别注意的是，这样计算出来的面积只是圆面积的四分之一，如图7-6所示，则有：

$$\frac{1}{4}S_{圆}=\int_0^r f(x)\,dx$$

$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$

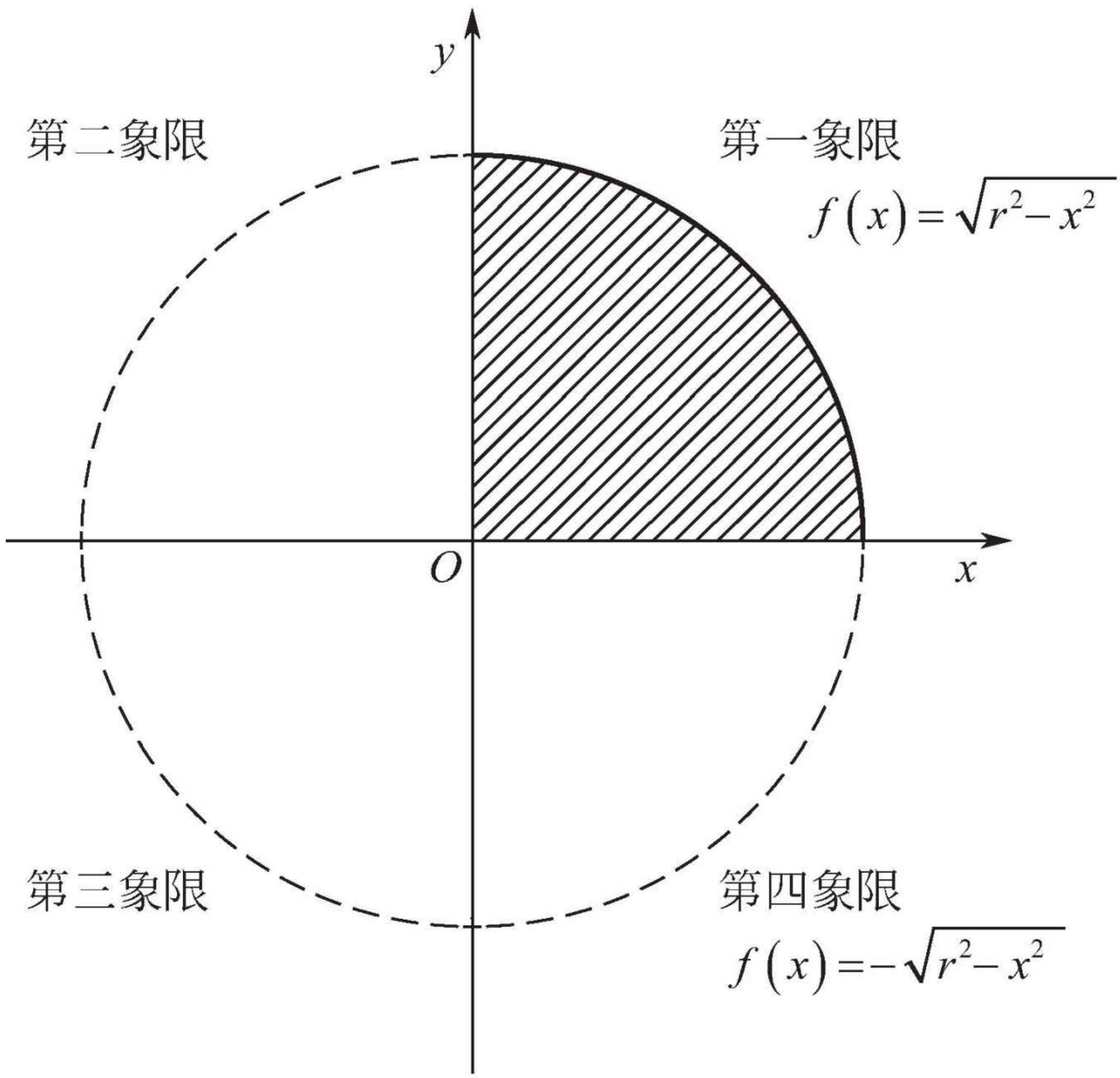


图7-6

通过查阅附录3的积分表可以得知：

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$$

又因为半径r一定是大于0的，所以积分表中的公式可用。由此可得：

$$F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+C$$

进一步地计算

$$\frac{1}{4}S_{圆}=\int_0^r f(x)\,dx$$

，则有：

$$\int_0^r f(x)\,dx=F(r)-F(0)$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{r^2-r^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{r}{r}+C-\frac{0}{2}\sqrt{r^2-0^2}-\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{0}{r}-C$$

$$=\frac{r}{2}\cdot 0+\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0\cdot r-0=\frac{r^2\pi}{4}$$

于是有

$$\frac{1}{4}S_{圆}=\frac{r^2\pi}{4}$$

经过整理后则有：$S_{圆}=r_2\pi$

对于椭圆的面积公式，有一种不太严谨的证明方法，就是把椭圆看成一个拉伸后的圆。换句话说，可以将其视为面积为$b_2\pi$的圆沿长轴方向拉伸

$$\frac{a}{b}$$

倍。如此则有：

$$S_{椭圆}=\frac{a}{b}\cdot S_{圆}=\frac{a}{b}\cdot b^2\pi=ab\pi$$

那么，若想使用定积分进行严谨的证明，则可参考图7-7和圆的面积公式的证明，于是有：

$$\frac{1}{4}S_{椭圆}=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

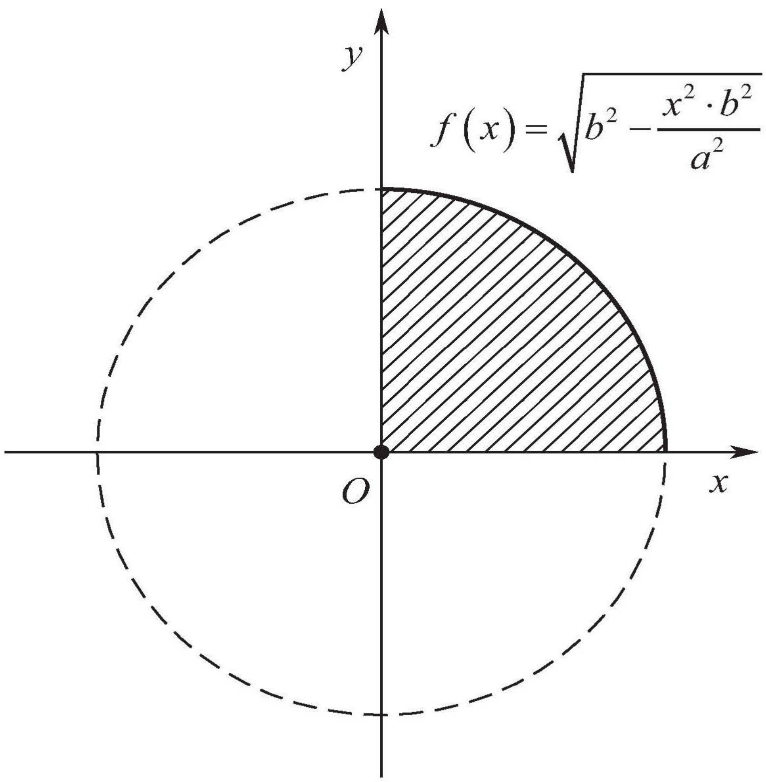


图7-7

$$f(x)=\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2b^2-x^2b^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

如果设

$$g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$$

相应地

$$f(x)=\frac{b}{a}\cdot g(x)$$

因此有：

$$\frac{1}{4}S_{椭圆}=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(0)$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2\pi}{4}=\frac{ab\pi}{4}$$

由此，我们同样可以轻松地证明出椭圆的面积公式是abπ。

7.9　神奇的直角三角形

我们可以把菱形看成四个直角三角形的和，而平行四边形和梯形也可以看成是矩形和直角三角形的组合。对于任意一个直角三角形来说，如果选它的一条直角边作底并设为d，在这条底上的高设为h，则有：

$S_{直角三角形}=\int_0^d f(x)dx$

$$f(x)=-\frac{h}{d}x+h$$

所以有：

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{h}{d}x^2+hx+C$$

$$S_{直角三角形}=F(d)-F(0)$$

$$=-\frac{h}{2d}\cdot d^2+d\cdot h+C-0-0-C$$

$$=-\frac{dh}{2}+dh$$

$$=\frac{dh}{2}$$

所以，直角三角形的面积为底乘以高的一半(这里我们只证明其中一条直角边作为底的情况)。

对于任意一个锐角三角形、以斜边为底的直角三角形或以钝角所对的边为底的钝角三角形，其面积都可以看成另外两个较小的直角三角形的面积之和。而对于钝角三角形来说，当以它的钝角所对的边为底时，则可以看成和锐角三角形一样的情况。而以它的锐角所对的边为底时，其面积则要看成两个直角三角形的面积的差。当然我们还需要一些更为严谨的证明。

对于一个锐角三角形、以斜边为底的直角三角形或以钝角所对的边为底的钝角三角形，其面积都可以看成另外两个较小的直角三角形的面积的和。我们可以把它画在坐标系中，如图7-8所示。

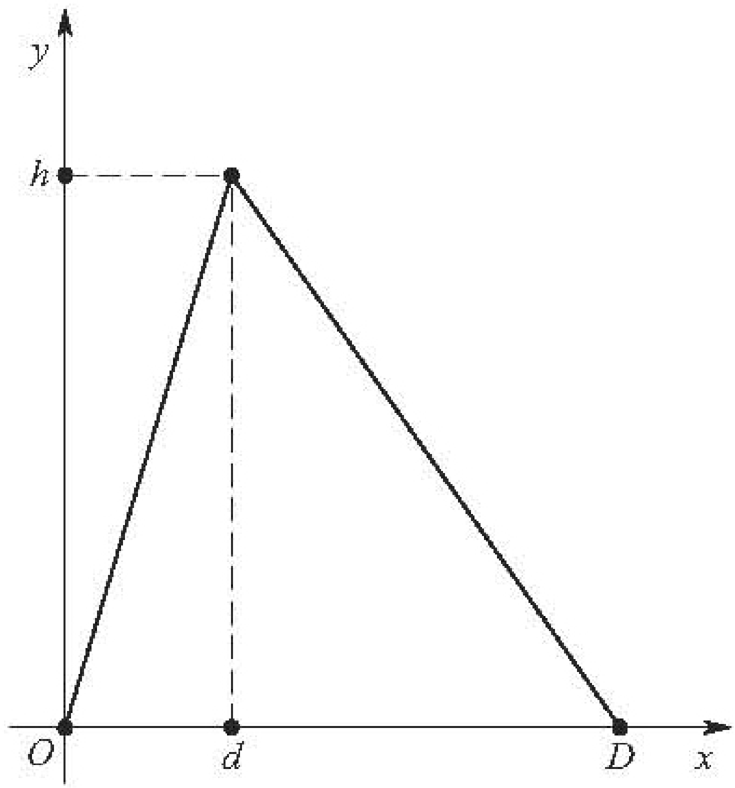


图7-8

图中，它的高为h，底为D-0＝D。如果用大写字母S来表示这一三角形的面积，则有：

$$\mathrm{S}=\int_0^d f(x)\,\mathrm{d}x+\int_d^D g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{h}{d}x \quad g(x)=\frac{h}{d-D}x-\frac{hD}{d-D}$$

所以就有：

$$F(x)=\frac{h}{2d}x^2+C$$

$$G(x)=\frac{h}{2(d-D)}x^2-\frac{hD}{d-D}x+C$$

$$S=\int_0^d f(x)\,\mathrm{d}x+\int_d^D g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{h}{2d}d^2-0+\frac{h}{2(d-D)}D^2-\frac{hD}{d-D}D-\frac{h}{2(d-D)}d^2+\frac{hD}{d-D}d$$

$$=\frac{hd}{2}+\frac{h}{2(d-D)}(D^2-d^2)+\frac{hD}{d-D}(d-D)$$

$$=\frac{hd}{2}+\frac{h}{2(d-D)}(D+d)(D-d)+hD$$

$$=\frac{hd}{2}-\frac{h}{2(D-d)}(D+d)(D-d)+hD$$

$$=\frac{hd}{2}-\frac{h(D+d)}{2}+hD$$

$$=\frac{hd}{2}-\frac{hd}{2}-\frac{hD}{2}+hD$$

$$=\frac{hD}{2}$$

对于一个钝角三角形来说，如果把它的钝角所对的边当做底，也可以归于刚刚讲过的情况。那么如果把它的某个锐角所对的边当作底又会是什么样的情况呢？

如果把钝角三角形的某个锐角所对的边当作底，则可以在坐标系中表示为图7-9所示的图像。

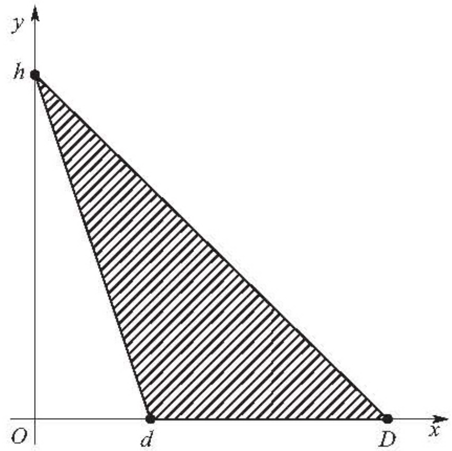


图7-9

这样一来它的底实际上是D-d，而它的高仍然是h，如果还用大写字母S来表示它的面积，则有：

$S=\int_{0}^{D}f(x)dx-\int_{0}^{d}g(x)dx$

$$f(x)=-\frac{h}{D}x+h \quad g(x)=-\frac{h}{d}x+h$$

所以就有：

$$F(x)=-\frac{h}{2D}x^{2}+hx+C$$

$$G(x)=-\frac{h}{2d}x^{2}+hx+C$$

$$S=\int_0^D f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^d g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{h}{2D}D^2+hD+C-0-0-C\right)-\int_0^d g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{hD}{2}+hD\right)-\int_0^d g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{hD}{2}-\left(-\frac{h}{2d}d^2+hd+C-0-0-C\right)$$

$$=\frac{hD}{2}-\left(-\frac{hd}{2}+hd\right)$$

$$=\frac{hD}{2}-\frac{hd}{2}$$

$$=\frac{h(D-d)}{2}$$

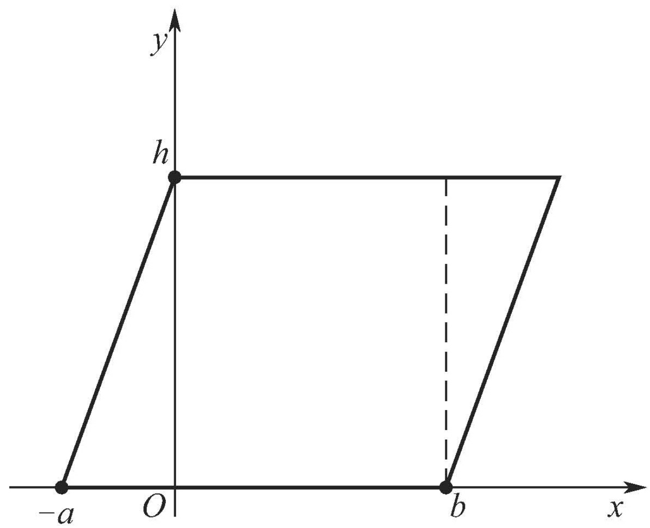
但因为它的底实际上是D-d，所以说来说去，无论是哪种三角形，它的面积公式都可以表示为

$$\frac{底\times高}{2}$$

7.10 “万变不离其宗” 的四边形

对一个平行四边形来说，它的面积公式可以写成两个 全等[注93]的直角三角形和一个矩形面积的和，如图7-10所示，该平行四边形的底为b-(-a)

＝b+a，高为 h[注94]。



如果用大写字母S表示该平行四边形的面积，则有：

$$S = 2 \times \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \frac{h}{a} \cdot x + h \quad g(x) = h$$

经进一步计算则有：

$$F(x)=\frac{h}{2a}\cdot x^2+hx+C$$

$$G(x)=hx+C$$

$$\begin{aligned}S&=2\cdot[F(0)-F(-a)]+[G(b)-G(0)]\\&=2\cdot\left[(0-0+C)-\left(\frac{h}{2a}\cdot a^2-ha+C\right)\right]+[G(b)-G(0)]\\&=-2\cdot\left(\frac{ha}{2}-ha\right)+[hb+C-0-C]\\&=ha+hb\\&=(a+b)h\end{aligned}$$

这样一来，我们就明白平行四边形的面积为什么是底乘高了。接下来，我们要分成两种情况讨论梯形的面积。

图7-11和图7-12所示的是两种不同的梯形；图7-11所示的是直角梯形，图7-12所示的是非直角梯形。

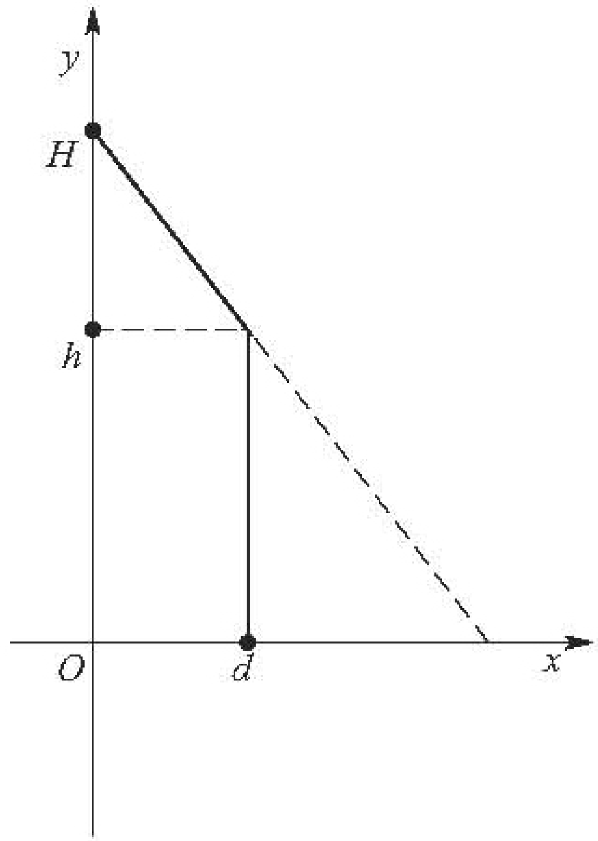


图7-11

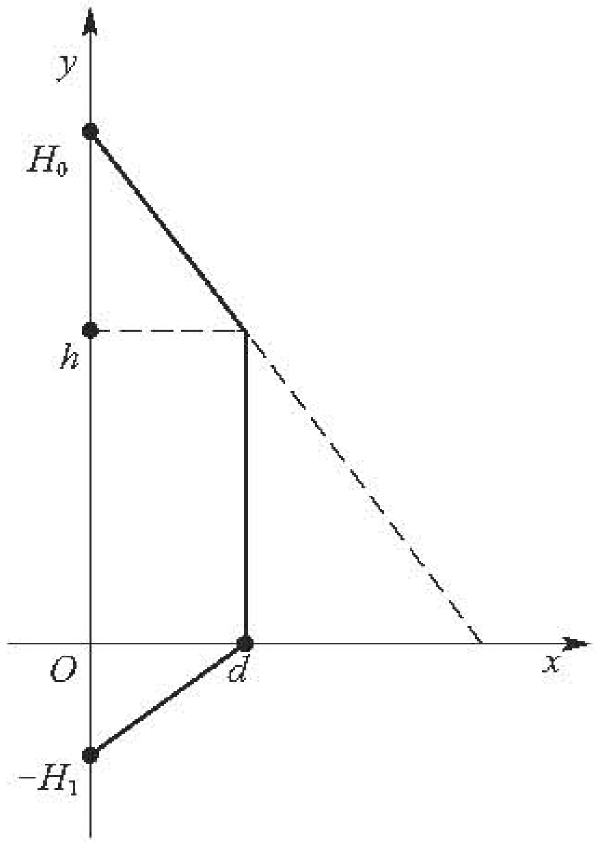


图7-12

图7-11所示的直角梯形的面积公式可直接使用定积分的定义进行证明：

S＝∫$_{0d}$f(x)dx

$$f(x)=\frac{h-H}{d}x+H$$

经过进一步计算，则有：

$$F(x)=\frac{h-H}{2d}x^{2}+Hx+C$$

$$S=\int_{0}^{d}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=F(d)-F(0)$$

$$=\frac{h-H}{2d}d^{2}+Hd+C-0-0-C$$

$$=\frac{(h-H)d}{2}+Hd$$

$$=\frac{hd}{2}+Hd-\frac{Hd}{2}$$

$$=\frac{hd}{2}+\frac{Hd}{2}$$

$$=\frac{(h+H)d}{2}$$

接下来，我们要证明如图7-12所示的一般梯形的面积公式了。对于这样一个梯形，可以认为它的面积等于一个直角梯形加上一个直角三角形的面积。

对于直角梯形的部分，我们可以套用刚刚已经证明过的公式，则有：

$S=\int_{0d}f(x)dx$

$$f(x)=\frac{h-H_0}{d}x+H_0$$

经过进一步计算可以得到：

$$S_0=\frac{(h+H_0)d}{2}$$

这样，我们只需要计算直角三角形的面积即可：

$$S_1=\int_0^d g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$g(x)=\frac{H_1}{d}x-H_1$$

经过进一步的计算则有：

$$G(x)=\frac{H_1}{2d}x^2-H_1x+C$$

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^d g(x)\,\mathrm{d}x\\&=G(d)-G(0)\\&=\frac{H_1}{2d}d^2-H_1d+C-0+0-C\\&=\frac{H_1d}{2}-H_1d\\&=-\frac{H_1d}{2}\end{aligned}$$

这时候发生了一个奇妙的事情——面积居然出现负值了！这是怎么一回事儿呢？其实这个问题我们在之前已经在前面的讨论中略有涉及，因为无论Σ还是∫，表示的都是累加，只不过累加的方向不同：Σ是表示沿着水平方向上的累加，用于表示移动的距离(如果把+3想象成往前走三步，-3就可以认为是往后退了三步，这样一来就等于原地不动)；∫表示的是垂直方向上的累加，用于表示占用的面积，那么这时候+3就表示多拿来3个纸箱，多占了3块面积，-3就可以认为是拿走了三个纸箱，节约了3块面积。

但实际上我们是多加了一个三角形，并没有节约面积。出现这种现象的原因是这个三角形画在了x轴的下方。在数学上，我们规定x轴上方的面积表示占用，x轴下方的面积表示节约。因为这里没有节约面积，所以我们要对S_1取相反数。综上所述，三角形的真实面积是S_1的相反数，即三角形的真实面积是$-S_1$。

所以总面积就应该为：

$S_{总面积}=S_0+(-S_1)=S_0-S_1$

于是就有：

$$S_{总面积}=S_0-S_1=\frac{(h+H_0)d}{2}+\frac{H_1 d}{2}=\frac{(h+H_0+H_1)d}{2}$$

这样一来，我们就成功地证明了：无论是什么样的梯形面积公式，都可以写成“底乘高除以2”了。

7.11　曲边梯形的面积

到此，我们终于把我们在中学阶段学习过的所有图形的面积公式证明过了。接下来我们将会学习一种新的几何图形——曲边梯形。只有得到曲边梯形的面积公式，才能得知我们自制大褂时到底需要多少布。那么我们现在就来学习什么是曲边梯形吧。

对于一般的梯形，我们将其分为直角梯形和非直角梯形。对于曲边梯形，我们也可以做类似的分类，即直角曲边梯形和非直角曲边梯形。

图7-13所示的是直角曲边梯形，假设它的高为h，构成它曲边的函数是f(x)，那么它的面积应该被表示为：

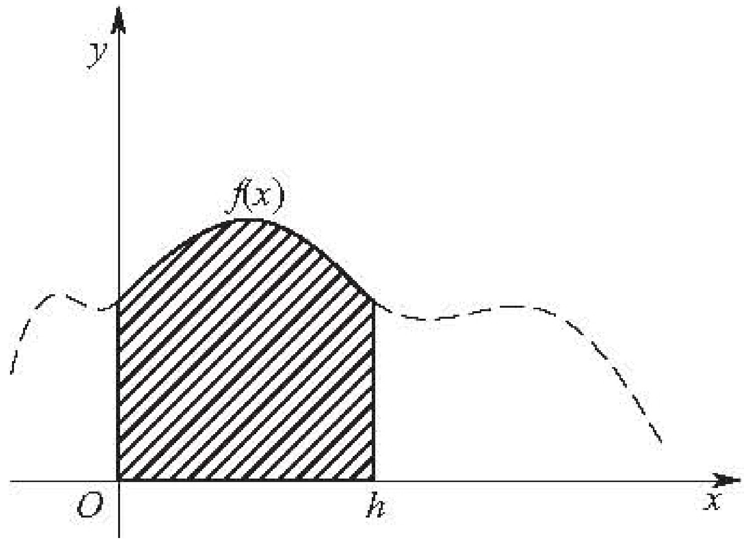


图7-13　直角曲边梯形

$S=\int_0^h f(x)dx$

$S=F(h)-F(0)$

对于图7-14这样的非直角曲边梯形来说，则有：

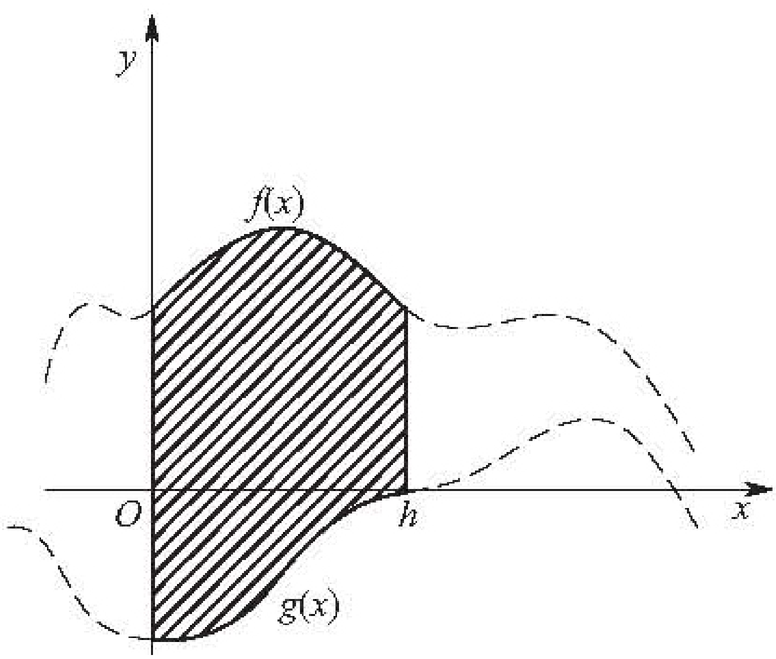


图7-14　非直角曲边梯形

$S=\int_{0h}f(x)dx-\int_{0h}g(x)dx$

至于这里为什么是$-\int_{0h}g(x)dx$而不是$+\int_{0h}g(x)dx$，我们在讨论非直角梯形时已经提到了——∫表示的是垂直方向上的累加，用于表示占用的面积。那么这时候+3就要想象成多拿来三个纸箱，多占了3块面积；-3就可以认为是拿走了三个纸箱，节约了3块面积。由于这里并没有节约面积，所以应该取相反数。

经过进一步的整理则有：

$S=\int_{0h}f(x)dx-\int_{0h}g(x)dx=F(h)-F[(0)]-[G(h)-G(0)]=F(h)-F(0)-G(h)+G(0)$

值得注意的是，对于曲边梯形来说，我们必须先求出它曲边所在的曲线函数的原函数，才能代入它的面积公式。这是因为它的面积公式无法被推导成一个简单的含有变量的数学表达式。

思考题

假如一件大褂可以分为前面的布(称为前片)、后面的布(称为后片)和两个袖子。那么你能不能结合所学，试着算出做一件大褂需要多少布呢？

这里如果需要使用曲边梯形，那么请结合第5章中拟合的知识，写出曲边梯形上下底所在曲线对应的函数。

第8章　包饺子需要多少馅

8.1　多包一些还是少包一些

经过第3章的学习，对于探索厨房数学，你有没有意犹未尽之感呢？在这一章中，我们将再次走进厨房，来计算包饺子需要多少馅儿。如果面多馅儿少，我们应该多包几个大饺子还是小饺子呢？我们将一起从数学的视角解释包饺子中的科学内涵。

8.2　从圆面积到圆周长

经过前7章的学习，我们已经对数学和微积分有了系统的认识。而我们在第7章已经讨论过平面图形的面积公式。对于一个平面图形，除了求面积以外，还可以求周长。对于正方形、长方形、三角形、菱形、梯形和平行四边形等仅由直线构成的图形，它们的周长显然是各边边长的和。但是对于圆或椭圆这样由曲线构成的图形，又应该如何求周长呢？那么我们现在就来讨论，怎么求圆的周长。

图8-1所示的是一个半径为r的圆，如果想求它的周长，就可以采用一种简单的方法，即在它的内部做一个与它有同一圆心但半径较小的圆。

较小的圆的半径比原来半径为r的圆的半径小dr。换句话说，小圆的半径为r-dr。

这时，如果dr足够小，甚至趋近于0，那么大圆和小圆的面积几乎一样，而大圆的周长就可以表示为大圆的面积减去小圆的面积除以dr。

如果用数学语言表达，则有：

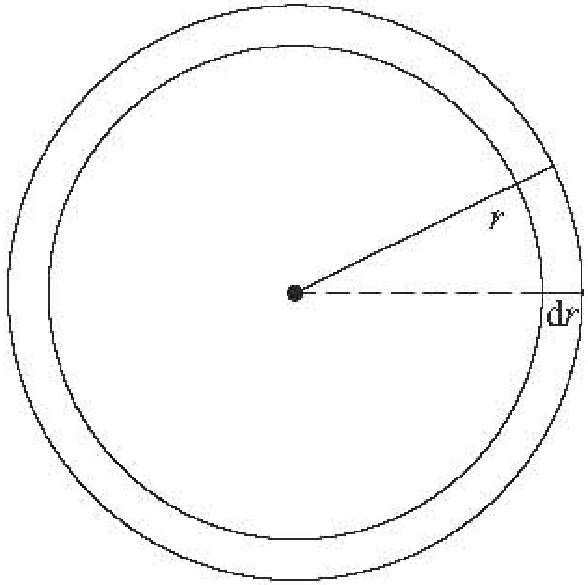


图8-1

$C=S_{大}-S_{小}$

$$C=\frac{\pi r^2-\pi(r-\mathrm{d}r)^2}{\mathrm{d}r}$$

如果把圆的面积公式设为$f(x)=\pi x_2$，上式可以写成：

$$C=\frac{f(r)-f(r-\mathrm{d}r)}{\mathrm{d}r}$$

我们又知道dr趋近于0，即$\mathrm{d}r\to 0$，于是就有：

$$C=\lim_{\mathrm{d}r\to 0}\frac{f(r)-f(r-\mathrm{d}r)}{\mathrm{d}r}$$

由于上式与我们在第2章学习过的导数的式子一致，所以我们就可以用导数来表示圆的周长，即：

$C=f'(r)$

因为$f(x)=\pi x_2$，所以$f'(x)=2\pi x$，则圆的周长为：

$C=2\pi r$

但你很快就会发现一个问题：这个式子根本就不适用于椭圆，也不能算出圆弧的长度。这时候我们就需要一种更加通用的方法，来计算任意一条光滑曲线的长度。

8.3 弧长公式

我们已经发现了用导数方法求曲线长度的局限性，那么现在就用一种更加通用的方法来计算任意一条光滑曲线的长度。

如图8-2所示，若要求函数y＝f(x)从A到B的长度，就需要把这条曲线分成若干可以近似为直线的小段。每个小段两端点横坐标的差都是dx。这样一来我们就可以用dy表示每个小段两端点纵坐标的差，即：

$$dy=f(x+dx)-f(x)=f'(x)dx$$

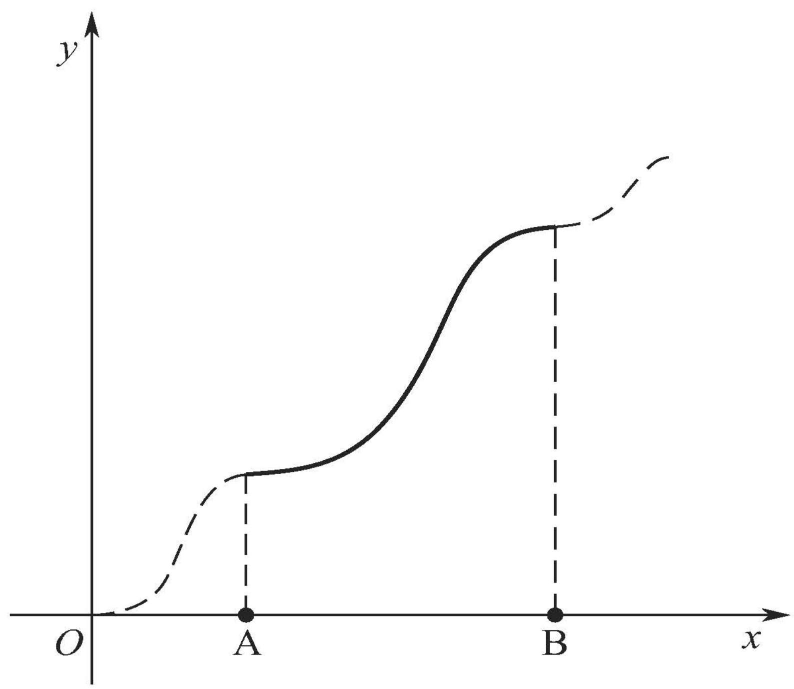


图8-2

这里省略了一个步骤，因为当dx→0时，有：

. 注95

$$f'(x)=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

在等式两侧同时乘以dx，有：

f(x+dx)-f(x)＝f′(x)dx

如果用ds表示曲线被分割成的若干近似于直线的小段，则可以用勾股定理表示ds的值，即：

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

接下来把dy＝f′(x)dx代入上式，则有：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+[f'(x)\mathrm{d}x]^2}=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+[f'(x)]^2(\mathrm{d}x)^2}$$

$$=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

再用定积分计算曲线的长度S，则有：

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

综上所述，对于函数f(x)表示的曲线，它从A到B的长度可以用积分表示为：

$$\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

8.4　弧长公式的检验

因为直线也可以被认为是由无数斜率相同的小段组成的，那么我们可以用较为简单的一次函数验证上述表达式。

假如某一曲线对应的函数是f(x)＝3x，请计算它的图像曲线在横坐标1～10之间的长度。我们知道这是一条直线，按照通常的方法，我们应该求解出起点和终点的纵坐标，并分别求出横坐标的差和纵坐标的差。这样一来，我们就能使用勾股定理来算出这条线的长度了。

按照这种思路，我们可以求出：

f(1)＝3·1＝3　　f(10)＝3·10＝30

于是有：

$$S=\sqrt{(x-x_0)^2+[f(x)-f(x_0)]^2}$$

$$=\sqrt{(10-1)^2+[f(10)-f(1)]^2}$$

$$=\sqrt{9^2+[30-3]^2}$$

$$=\sqrt{81+27^2}$$

$$=\sqrt{810}$$

$$=9\sqrt{10}$$

那么我们现在使用弧长公式——

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot \mathrm{d}x$$

来进行计算。因为f(x)＝3x，则有：

f′(x)＝3

接下来就可以将以上结果代入

$S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot \mathrm{d}x$

于是有：

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^{10} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot \mathrm{d}x \\
&= \int_1^{10} \sqrt{1+[3]^2}\cdot \mathrm{d}x \\
&= \int_1^{10} \sqrt{10}\cdot \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{10}\cdot 10-\sqrt{10}\cdot 1 \\
&= 9\sqrt{10}
\end{aligned}$$

这样我们就验证了弧长公式：

$S=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot \mathrm{d}x$

的正确性。因此，它是可以被用于任意一条可以表示为f(x)的光滑曲线上面的。

8.5　表面积

对于一个立体图形，我们不难求出它的表面积。像是长方体、正方体或者是棱柱这样由简单的平面图形构成的立体图形，我们可以先求出它各面的面积，然后再求和。

对于圆柱体和圆锥体，我们可以把它的侧面展开成矩形或扇形来求它们的表面积。但是对于球体、椭球体这样的立体图形，我们又该怎样求它们的表面积呢？接下来我们就以球体为例，来求出球体的表面积。

图8-3中是一球体，我们先沿着它的纬线，将它分割成若干个非常薄的切片。如果把球切割成若干份，并用Δh来表示每一份的高度，那么就有Δh→0。由此我们就可以认为它的上下底面几乎是一样的了，也就可以将它按照圆柱体侧面积的累加和的方式考虑。

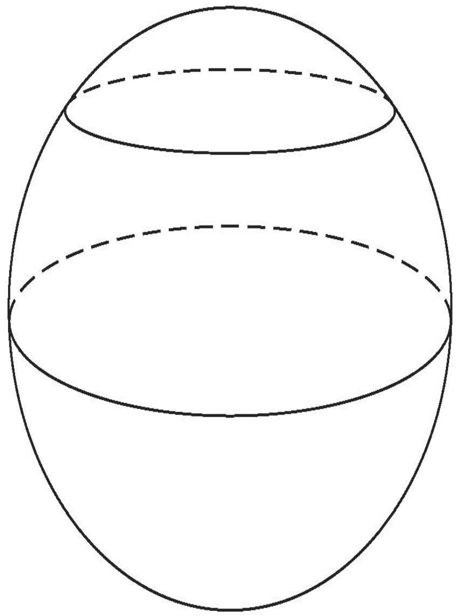


图8-3

如果用n表示非常薄的切片相对球心的位置，显然有：

$$s_n = 2\pi\sqrt{r^2 - n^2} \cdot \frac{r}{n}$$

如果对上述数学表达式进行求和运算，能够得到：

$S = 4\pi r_2$

8.6　高观点下的体积公式

既然能够算出球体的表面积，那球体和其他立体图形的体积又应该怎么算呢？实际上我们仅需要知道立体图形的横截面的面积公式，就可以求出它的体积了。

比如，球体的横截面是圆形，球体的横截面面积能够表示为如下数学表达式，其中x为横截面相对球心的位置：

$f(x) = \pi r_2 - (x_2)$

我们可以用定积分来进一步推导出球体的体积公式。为了方便起见，我们先算半个球的体积，然后把它乘以2，则有：

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^r \pi\left(r^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\int_0^r \pi r^2\,\mathrm{d}x - \int_0^r \pi x^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi r^3 - 2\int_0^r \pi x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{6}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

对于所有的立体图形来说，只要知道它横截面的面积公式，自然就可以按照上述方法求出它的体积。大家不妨自己动手算一算，试一试。

8.7　再探表面积

对于圆的周长，我们可以认为是一个圆的面积减去和它极为相似但稍微小一点点的圆的面积后再除以它们半径的差。相似地，我们可以认为球体的表面积也是一个球体的体积减去和它极为相似但稍微小一点点的球体的体积后，再除以它们半径的差。我们已经证明过，按照这种方法来求圆的周长，就是对圆的面积求导，相对于球体来说，球体的表面积就可以认为是对球体的体积进行求导。

于是则有：

$S=V'$

$$S=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'=4\pi r^2$$

显然，这和我们之前得到的结果完全一致。

8.8　计算的误区

有一种常见的对于立体图形表面积求解的误区——为什么球体的表面积不能表示为对圆的周长的积分？

这源于我们对图形的一种片面的认识——点可以组成线、线可以组成面、面可以组成体。

但是在高等数学中，线是由极为细小的线所组成的；面是由极小的面组成的；体则是由极小的体组成的。圆周长可以被理解成极为薄的平板，所以在计算时，我们应该对平板的侧面积进行积分，而不是对截面的周长积分。

8.9　重积分初探

在第1章中我们就讨论过多元函数，对于一元函数来说，有导数(求导)、微分、积分、泰勒展开等概念。实际上，多元函数也有这些概念，只

不过由于多元函数的自变量不止有一个(两个或以上)。正因如此，多元函数中(多个)自变量与(一个)因变量之间的关系往往要比一元函数中(一个)自变量与(一个)因变量的关系复杂得多。大家可以查阅附录四中对多元函数微积分的介绍来了解多元函数的微积分。

这里我们讲解一种极为简单的重积分的应用——用重积分求球体表面积。我们依然只计算半个球面，然后再把它乘以2，进而得到整个球的表面积。

半个球的函数方程可以写成：

$$z=f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

我们先根据附录四中对多元函数微积分的介绍，对函数f(x，y)求偏导数，则有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

于是：

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

上式可以写成重积分的形式，即为：

$$S=\iint_{\text{球面}}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

大家可以自行计算这个式子，最后会得到和刚才一模一样的结果。

8.10　馅少了怎么办

虽然我们可以按照第3章中的方法来计算面团的大小，又可以使用圆面积公式计算出饺子皮的面积，之后再用刚刚学习过的体积公式来计算需要多少馅料。尽管这样，相信你还是会遇到这样的情况：有时包着包着馅料就不够用了，或是快要包完时发现馅还剩好多。

为了方便计算，我们把饺子想象为近似的球体，那么它的体积(馅料)和表面积(饺子皮)就都是可求的了。如果你不想按照近似的球体计算，也可以自行观察饺子的横截面，来推导它的体积和表面积，这里由于篇幅限制不再赘述。

假设我们所用馅料的体积为

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$$

那么如果包成一个大饺子的话，饺子皮的面积是多少呢？

我们可以认为其是半径为3的球体，这样一来饺子的表面积就是：

$4\pi r_2 = 4\pi \cdot 3_2 = 36\pi$

那么如果把饺子馅平均分配，包成两个较小的饺子，平均每个饺子得到体积为18π的馅料，那么我们可以列出以下方程，求出饺子的半径：

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 18\pi$$

接下来则有：

$$r^3 = 18 \cdot \frac{3}{4}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

$$r = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

接下来只需要把

$$r = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

代入球体面积公式，但是不要忘记，这里是包两个饺子，所以要记得乘以2。因此有：

$$S = 2 \cdot 4\pi r^2 = 8\pi(3 \cdot 2^{-\frac{1}{3}})^2 = 72\pi \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$$

显然，

$$72\pi \cdot 2^{-\frac{2}{3}} > 36\pi$$

所以如果馅多了，应该把饺子包大一些，如果馅少了，则可以选择把饺子包小一些。

思考题

你觉得水滴的横截面是什么形状的呢？你能求出水滴的体积和表面积吗？你可以通过什么样的方式来求解并验证呢？不妨动手写一写，算一算吧。

添油加醋

图8-4所示的是一个正十二面体，你能用什么方法求出它的体积和表面积呢？试试看吧。

提示：不一定局限于本章所讲解的方法。

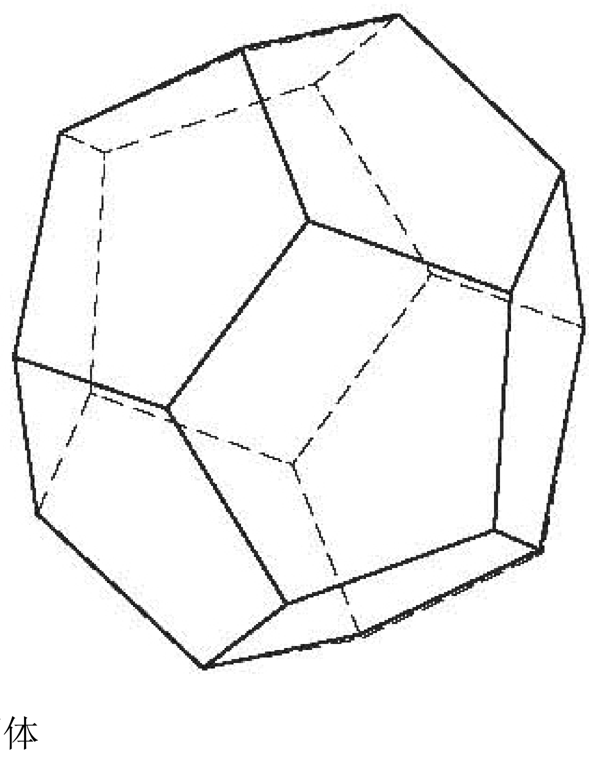


图8-4　正十二面体

第9章　选购鱼缸

9.1　养鱼的学问

在家中饲养观赏鱼正成为越来越多的人的爱好。但是你知道吗？很多观赏鱼对水压和水温都极为挑剔，所以选购一个好的鱼缸就成为了能否养好观赏鱼的关键所在。那么在这一章中，我们就一起走进鱼市来选购鱼缸。

9.2　水压的计算

对于那些美丽的观赏鱼来说，它们对水压、水温以及水质都是极为敏感的。选购一个好的鱼缸有助于观赏鱼的生长。那么我们就来讨论如何计算鱼缸中的水压。

水深h处的压强为：

$p = \rho gh$

我们把计算鱼缸中的水压抽象成在水深为h处的一面积为S平板的一侧所受的水压。那么当平板水平放置的时候，它受到的水压为：

$P = p \cdot S$

但如果平板不是水平放置在水中的，那么它各处所受的压强p是不相等的。

对于一个盛有深度为h的水的矩形鱼缸来说，它的侧壁受到了多大的水压呢。为了方便计算，我们假设鱼缸的长为a，宽为b。

我们可以根据$P = p \cdot S$得到鱼缸底受到的水压为：

$P = \rho gh \cdot ab$

那么对于它的侧壁，我们需要使用微积分来计算其受到的水压。深度为x的各点处的压强都可以表示为：

$p = \rho gx$

在某一深度中，侧壁的总面积可以表示为：

$S=2a+(\ b)dx$

接下来就可以用定积分来求解侧壁所受的水压：

$dP=\rho gx\cdot 2(a+b)dx$

$P=\int_{0h}\rho gx\cdot 2(a+b)dx=\rho g(a+b)\int h_{02}xdx=\rho g(a+b)\cdot(h_2-0_2)=\rho g(a+b)h_2$

你会发现，实际上在非常小的小段内受到的力是恒力，这和我们之前说过的在非常小的小段内曲线可以理解为直线是一样的。原来数学和物理竟有如此多的相似之处！

9.3　从数学到物理

彼得·拉克斯[注96]说：“数学和物理的关系尤其牢固，其原因在于数学的课题毕竟是一些问题，而许多数学问题是从物理中产生出来的。还不止于此，许多数学理论正是为处理深刻的物理问题而发展出来的。”

让大物理学家爱因斯坦都感到苦恼的是，在引力作用下，空间会发生扭曲，而欧氏几何却无法解决空间扭曲的问题。直到爱因斯坦了解到法国数学家 黎曼[注97]提出的黎曼几何，问题才迎刃而解。黎曼的研究给数学开辟了新途径。几何从此不再局限于平坦而线性的欧几里得空间。黎曼引进了更抽象的、具有任意个维数的空间。50年后，爱因斯坦发现黎曼几何刚好可以统一牛顿的重力理论和狭义相对论，也正是在有了黎曼几何这一数学工具之后，他才顺利地建立了广义相对论。

在微积分诞生之前的世界，绝大多数研究都是静态的、恒定的。变力做功的问题曾是微积分发明之前的物理学家最为棘手解决的问题。在17世纪，很多科学家都已经意识到世界是动态的、发展的。但是对于这类动态问题，他们并没有得到一个非常好的解决工具，直到微积分的出现。因为微积分是动态的数学，又是解决动态物理问题的理想工具。

17世纪初，德国天文学家开普勒提出了他的行星运动三定律。但是，由于他不了解动态的数学。他只好把他的开普勒第二定律表述成为：“行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过相等的面积。”

自从微积分被发明之后，物理学甚至是天文学都得到了极大的发展。那么，你知道什么是引力吗？试着查阅资料，去了解它的发现和微积分之间的关系吧。

9.4　变力做功

和水压类似，对于变力做功，我们依然是把它分解为非常小的小段，在小段内把沿直线的变量做功理解为恒力做功。

恒力沿直线做功的公式为：

W＝F・x

假如力F随位移x的变化符合F＝kx，则有：

dW＝kx・dx

如果这个力使得物体发生了距离为a的位移，则有：

$$W=\int_0^a kx\cdot \mathrm{d}x=\frac{k}{2}a^2-\frac{k}{2}0^2=\frac{k}{2}a^2$$

我们再一次发现，在非常小的小段内受到的力是恒力。相信你现在已经理解了为何数学和物理竟有如此大的相似之处。

思考题

你喜欢观赏鱼吗？试着了解你喜欢的观赏鱼最喜欢的水压，为它们选购一个合适的鱼缸，并计算鱼缸的侧壁受到的水压。

第10章　模拟确定急诊方案

10.1　酒精中毒引关注

酒精中毒是急诊内科中常见的疾病。特别是在节假日期间，酒精中毒的高发期。与此同时，酒驾和醉驾也成为了备受社会各界关注的问题。在这一章我们就来讨论饮酒和微分方程之间的关系。

10.2　从开普勒到微分方程

想要了解酒精中毒，首先应该知道，人体对酒精的吸收和排出都是动态的。对于这种动态的关系，一般的函数方程几乎无法表示。这时就需要用动态的方法来表示这种关系。

在微积分被提出之前，绝大多数学科的研究几乎都是静态的。在17世纪初，德国天文学家 开普勒[注98]提出了行星运动三定律。但由于他不了解动态数学，他只好把开普勒第二定律表述成为：“行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过相等的面积。”

其实开普勒已经意识到，行星的运动的方向和速度都是动态的。这和我们需要解决的酒精在人体内的情况相似。显然，对于这类动态的问题，应列出表现其变化规律的方程，而这就是微分方程的由来。

如果说我们之前了解的方程的解都是一个数的话，那么微分方程的解则可以理解为一个未知的函数。

10.3　初探微分方程

简单地说，微分方程即为含有微分的方程。比如，导数可以写成微分的比的形式，所以含有导数的方程便可以认为是微分方程。这是我们在第6章提到过的例子。对表示一条线各点斜率变化的式子，能不能用函数来表示这条线呢？

经过第6章的学习，我们知道这显然是可以的。比如一条线在各点处的斜率均为2x，那么则有：

y′ ＝2x

这里我们可以把y′ 写成微分的比的形式，即：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

这样一来，我们就得到了一个微分方程。这时我们就可以按照解方程的方式来求解y了。具体步骤如下：

原方程为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

在等式两侧同时乘以dx，则有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{d}x=2x\cdot \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y=2x\cdot \mathrm{d}x$$

如果想要求解y，只需要在等式两侧同时取积分，则有：

$\int \mathrm{d}y=\int 2x\cdot \mathrm{d}x$

$y=\int 2x\cdot \mathrm{d}x$

经过计算和整理，最后的结果为：

$y=x_2+C$

这样我们就得到了微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

的解。但是这个解里面是带有常数C的，我们还得进一步确定C的值。不过，就已知条件来说，是不足以确定C取何值的。所以，我们要增加一个已知条件，比如已知这条线经过点(1，1)。那么我们就要把(1，1)代入到$y=x_2+C$中去，即：

$1＝1_2+C$

这样一来我们就能够得到C＝0，整理后则有：

$y＝x_2+0$

$y＝x_2$

对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

来说，$y＝x_2+C$和$y＝x_2$都是它的解，但是$y＝x_2+C$更为特殊，因为它包含一个未知常数，所以$y＝x_2+C$叫做微分方程的通解，即“通用的解”。

10.4　齐次方程

为了找到系统解微分方程的方法，我们将微分方程按照不同的标准分类。其中，是否为齐次方程就是一种常见的分类标准。对于一阶微分方程来说，如果它可以被化成如下形式，那么它就是一个齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

对于这样一个齐次方程来说，我们可以设

$$u=\frac{y}{x}$$

这样一来就有：y
＝ux

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

现在我们就可以把齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

写成下面的式子：

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

进一步计算得：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

这时对等式两侧同时求积分，则有：

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

之后只需要把求积分得到的结果中的u改成

$$\frac{y}{x}$$

就得到了齐次方程的通解。

10.5　一阶线性方程

在了解了什么是齐次方程之后，我们来介绍一下一阶线性微分方程。一阶线性微分方程可以简单地理解为未知函数和未知函数的导数都是一次方程的微分方程。用文字表述起来颇为啰嗦的一阶线性方程，如果用数学的语言表述则是：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

对于一阶线性方程来说，Q(x)是否等于0决定了它是不是齐次方程：当Q(x)等于0，即能写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

的时候，它是齐次方程；否则它就是非齐次的。

我们现在不妨对齐次线性方程进行整理，来求出它的通解的表示方法。对于一个齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

来说，通过移项可以改写成：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

这时对等式两侧同时求积分，则有：

$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$

经过进一步的整理，就可以得到它的通解：

$y=Ce^{-\int P(x)dx}(C=\pm eC_1)$

10.6　微分方程模型

到现在为止，我们终于可以说自己弄懂什么是微积分了。接下来我们就要来讨论微分方程和数学模型的关系。对于数学模型，我们并不陌生。因为我们在第1章中就已经接触过博弈模型了。现在我们将要学习一种新的数学模型——微分方程模型。

之前已经介绍过，在微积分出现之前，研究大多是静态的。那么对于随着时间变化的事物，我们就必须引入微积分的概念进行研究，而微分方程模型就是一种建立简化的动态模型的方法。

传染病的研究、药物在体内的分布情况的研究、人口的预测和万有引力定律的发现……这些都和微分方程模型有着密不可分的联系。它对临床医学和药理学的发展都起到了不可忽视的作用，以至于后来发展出了“药物动力学”这一学科分支。

建立房室模型是药物动力学研究的基本步骤之一。一般来说，二室模型是较为常用的研究血药浓度的模型。由于本书是并不是一本专业的医学书籍，所以在模型和计算上尽可能地做出简化。这里我们采用的是较为简单的一室模型。至于临床上究竟采取何种急救方案，还得由医生经综合考虑后做出决定。

我们把饮酒的模型进行简化，设肠道中的酒精量为x(t)，血液系统中的酒精量为y(t)。并作出如下假设：

1.肠道中的酒精向血液系统转移的转移率与酒精量x(t)成正比，用k_1表示。

2.血液系统的酒精排除率与酒精量y(t)成正比，用k_2表示。

3.总量为M的酒精在t＝0的瞬间进入肠道。

4.酒精被吸收的半衰期为b_1，排除的半衰期为b_2。

5.体重为50～60千克的成年人的血液总量为4000毫升。

根据上述已知条件，我们就可以对未知函数x(t)和y(t)列出如下微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=-k_1x \quad x(0)=M$$

$$\frac{dy}{dt}=k_1x-k_2y \quad y(0)=0$$

这样一来我们就可以求出上述微分方程的解，即：

$x(t)=Me_{-k1t}$

$$y(t)=\frac{Mk_1}{k_1-k_2}(e^{-k2t}-e^{-k1t})$$

如果想要确定k_1和k_2的值，则需要先确定半衰期，即可以通过

$$x(b_1)=\frac{x(0)}{2}$$

来确定k_1。再设某一时刻T有$y(T)=a$，则可利用

$$y(T+b_2)=\frac{a}{2}$$

来求出k_2。

这样一来，我们就能够了解饮酒时酒精在体内的分布情况了。

思考题

除酒精中毒外，误食药物也是一种急诊内科中的常见病症。假如有一儿童误吞了1100毫克的氨茶碱片，家人及时发现后送往医院。已知 氨茶碱[注99]被吸收的半衰期约为5小时，被排除的半衰期约为6小时，孩子的血液总量为2000毫升。请根据上述条件模拟急救方案。

后记

所谓后记，就是畅所欲言的场所，那就从这本书谈起吧。

在这本书中，我们一起学习了微积分中的若干概念，并且解决了多个生活中常见的问题。让我感到欣喜的是，书中的问题并不只是停留在大众科普的级别，而是达到了能够让大家熟练使用微积分和数学分析的知识来解决实际问题的水平。

如果大家能将书中十个章节的内容全部搞懂的话，那么恭喜大家已经达到了相当的数学水平。

就数学、物理和其他一些理课和工科的专业来说，本书没有涉及的部分也只有多元函数的微分、重积分、曲面积分和无穷级数等知识了。但是，只要理解了微积分的基本概念，大家就能很容易地自学这些部分。

想要继续学习高等数学的读者，可能会遇到一个叫做“向量”的概念。而这是一种“有方向和大小的量”。虽然在本书中我们一直都在使用矢量的概念，但是我们却没有系统地介绍过矢量。因此，与其浪费笔墨在一些云里雾里的概念上，不如让大家在实践中真切感受。而大家在这本书中读到的文字，都不是专门为了应试而创作的。

对我来说，这本书好似一封长信，里面记录了我的诸多观点和学习微积分的经验。我并没有像教科书一样用大量的笔墨去描述一个概念，而是告诉大家我的思考和生活体验。因为数学能借你一双慧眼并不在于它的定义，而在于它背后的思想。

下面来谈一谈我与数学的缘分。数学最吸引我的地方就是它非常好玩。而我在发现“数学好玩”时，就有一种“相见恨晚”的感情。我第一次发觉“数学好玩”是在高中时的一节立体几何课上。当时我们刚刚经历了文理分科，数学课就变成了分班教学。分班之后，我的数学老师就换成了一位专门教授理工科的老师。她鼓励学生用多种方法解题，对于解题的要求也只有“严谨”二字。从那一年开始，我便与数学结缘。那时我经常拿着几种不同的解题方法去请教老师。对于某些方法适用于什么样的问题，同一道题目有哪些捷径可以走等数学的新思维，都是在那时建立起来的。

这本书能够和大家见面，最该感谢的人就是王若男老师。如果没有王老师，这本书也许还以“祺祺的数学课”这样一个名字，静静地躺在我的

博客上面。而现在这本书和我本来要写的《祺祺的数学课》已有了天翻地覆的差别。

最后衷心祝愿各位读者学习进步，学业有成。

刘祺

附录1　本书使用的符号体系

符号	示例	含义
$\lceil\ \rceil$	$\lceil x \rceil$	对 x 向上取整
$\lfloor\ \rfloor$	$\lfloor x \rfloor$	对 x 向下取整
$f()$	$f(x)$	关于 x 的映射 f 的函数❶
$\in$	$a \in A$	a 属于 A 集合，a 是 A 集合中的一个元素
$\notin$	$a \notin A$	a 不属于 A 集合，a 不是 A 集合中的一个元素
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A 是 B 的子集
$\subset$	$A \subset B$	A 是 B 的真子集
ϕ	ϕ	空集
$\backslash$	$A \backslash B$	A 与 B 的差集
$-$	$\overline{A}$	A 的补集
N	N	自然数集❷
N^*	N^*	正整数集
Q	Q	有理数集
R	R	实数集
C	C	复数集
$f(\ )'$	$f(x)'$	对于函数 $f(x)$ 的一阶导数
$f(\ )^{(n)}$	$f(x)^{(n)}$	对于函数 $f(x)$ 的 n 阶导数
d	$\mathrm{d}x$	对 x 进行微分
$F(\ )$	$F(x)$	$f(x)$ 的原函数
$\int$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	对 $f(x)$ 求不定积分
$\int_a^b$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	对 $f(x)$ 从 a 到 b 求定积分

❶ 本书中也使用其他小写字母表示映射。

❷ 本书认为自然数包含 0。

附录2 常用公式及其证明

第一部分　常用导数公式及证明

结论1　常数的导数是零

设f(x)＝C　　(C为常数)

∴有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

∴故f(x)＝C时，有f′(x)＝0

结论2　当f(x)＝xn时，有f′(x)＝nx_{n-1}　(n为常数)

为了方便起见，这里我们采用导数的

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

的形式，而非

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

的形式。

设f(x_0)＝x_{0n}　　(n为常数)

∴有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\cdots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1})$$

$$=nx_0^{n-1}$$

对于大家来说，可能最难以理解的就是中间这一步

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\cdots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1})$$

是怎么来的。现在，我们先忽略极限的运算，因为现在等式两边的极限运算符没有变，所以说明这一步并没有做极限的运算，那么就有

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$=x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1}$，而我们只需要弄明白这个式子是怎么来的就可以了。由于它本身就是一种计算经验，所以我们这里只做对它的检验。

对于这样一个式子来说，思维活跃的读者可能已经发现，只需把左边分母上的$x-x_0$挪到右边去就可以了。那么我们现在以更科学的方法来验证这个等式的成立。首先右边$=x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1}$，我们把右边的式子乘以$x-x_0$，则有：

$(x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1})\cdot(x-x_0)$

不妨把括号打开，则有：

$x_{n-1}\cdot(x-x_0)+x_0x_{n-2}\cdot(x-x_0)+x_{02}x_{n-3}\cdot(x-x_0)+\cdots+x_{0n-2}x\cdot(x-x_0)+x_{0n-1}\cdot(x-x_0)$

再打开就有：

$x_n-x_0x_{n-1}+x_0x_{n-1}-x_{02}x_{n-2}+\cdots+x_{0n-2}x_2-x_{0n-1}x+x_{0n-1}x-x_{0n}$

消去能够抵消的项，就有：

x_n-x_{0n}

所以，我们就得到了：

$(x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1})\cdot(x-x_0)=x_n-x_{0n}$

如果在等式两边同时除以$x-x_0$，则有：

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$=x_{n-1}+x_0x_{n-2}+x_{02}x_{n-3}+\cdots+x_{0n-2}x+x_{0n-1}$

这样我们就知道了这一步是怎么计算的。这实际上是一种计算经验，就像“1+1＝2”一样，当你足够熟练的时候，就可以自如地算出来了。

结论3　当$f(x)=\sin x$时，有$f'(x)=\cos x$

设$f(x)=\sin x$

有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot[\sin(x+\Delta x)-\sin x]$$

根据三角形和差化积公式：

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$故原式=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

这时我们发现，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

的前半部分不就是之前讲过的重要极限之一吗？至于后面的

$$\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

，当Δx→0时等于cosx。

综上所述，当f(x)＝sinx时，f′(x)＝cosx

结论4　当f(x)＝cosx时，有f′(x)＝-sinx

设f(x)＝cosx

有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\left[\cos(x+\Delta x)-\cos x\right]$$

根据三角形和差化积公式

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

故原式

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{\Delta x}\cdot 2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{2}{\Delta x}\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

经整理可得原式

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

这时我们可以看出，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

的前半部分又是重要极限。至于后半部分

$$-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

，当Δx→0时等于-sinx。

结论5　当$f(x)=a_x$时，有$f'(x)=a_x\ln a(a>0，a\neq1)$

设$f(x)=a_x(a>0，a\neq1)$

则有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{x}\cdot(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^{x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

显然地，此时我们只需要计算出来

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

的结果，就可以推导$f(x)=a_x(a>0，a\neq1)$的导数公式了。

这时我们令$t=a_{\Delta x}-1$。

因为$t=a_{\Delta x}-1\Rightarrow t+1=a_{\Delta x}\Rightarrow\log_a(t+1)=\log_a(a_{\Delta x})\Rightarrow\Delta x=\log_a(t+1)$，

所以有$\Delta x=\log_a(t+1)$。

又∵

$$\lim_{\Delta x\to0}a^{\Delta x}=1$$

，即$\Delta x\to0$时，$a\Delta x\to1$。

∴$a_{\Delta x}-1\to0$，即$t\to0$。

综上所述，当$\Delta x\to0$时，$t\to0$。

所以有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(t+1)}$$

这里对

$$\frac{t}{\log_a(t+1)}$$

取倒数，即

$$\frac{\log_a(t+1)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\log_a(t+1)=\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

显然，

$$\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

是两个重要极限之一的

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

的一种变形。

所以有

$$\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}=\log_a\mathrm{e}=\frac{\log_e\mathrm{e}}{\log_e a}=\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}$$

∴

$$\frac{t}{\log_a(t+1)}=\ln a$$

∴当f(x)＝a_x时，有f′（x)＝$a_x$lna(a＞0，a≠1)

结论6　当f(x)＝$\log_a$x时，有

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$$

(a＞0，a≠1)

设f(x)＝$\log_a$x(a＞0，a≠1)

有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

又遇到了和结论5中类似的情况，这时我们令

$$t=\frac{\Delta x}{x}$$

则有

$$\frac{\log_a(t+1)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\log_a(t+1)=\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

显然，

$$\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

是两个重要极限之一的

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

的一种变形。

所以有

$$\lim_{t\to 0}\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}=\log_a \mathrm{e}=\frac{\log_e \mathrm{e}}{\log_e a}=\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}$$

∴当$f(x)=\log_a x$时，有

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\ (a>0，a\neq 1)$$

第二部分　导数运算法则的证明

结论7　$[u(x)\pm v(x)']=u'(x)\pm v'(x)$

$$[u(x)\pm v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)\pm v'(x)$$

结论8　$[u(x)\cdot v(x)']=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$$[u(x)\cdot v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

结论 9 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

结论10

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$$

设有一函数x＝f(y)在某一区间内单调、连续、可导，故x＝f(y)的反函数$y=f_{-1}(x)$存在，$y=f_{-1}(x)$也在同一区间内单调、连续。

于是有：

$\Delta y=f_{-1}(x+\Delta x)-f_{-1}(x)$且$\Delta y\neq 0$

接下来有：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

∵y＝$f_{-1}(x)$连续，故：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

∴综上所述有：

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}$$

第三部分　不定积分性质及相关公式

结论11　d∫[f(x)dx]＝f(x)dx(也写作df(x)＝f′(x)dx)

由不定积分的定义一[如果有F′(x)＝f(x)，那么称F(x)是f(x)的原函数]和定义二∫[f(x)dx＝F(x)+C，C是任意常数]可知：∫f(x)dx是f(x)的原函数(之一)。

所以一定有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]=f(x)$$

即有：

d∫[f(x)dx]＝f(x)dx

也可以写成：

df(x)＝f′(x)dx

有一种“模块化的思维模式”，大家可以记住这样的一个式子：

d[模块]＝[模块的导]dx

这里的“模块”可以是任意的表达式或同一表达式的导数。

结论12[注100]　假如$f(x_1)$具有原函数，且$x_1=g(x_2)$可导，则有：

$\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2=\int f(x_1)dx_1$

证明：假设$f(x_1)$有原函数，它的原函数是$F(x_1)$，即有：

$F'(x_1)=f(x_1)$

$\int f(x_1)dx_1=F(x_1)+C$

如果x_1是中间变量，则设：$x_1=g(x_2)$且$g(x_2)$可微。此处根据复合函数的微分法则，有：

$\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2=F[g(x_2)]+C=\int f(x_1)dx_1$

综上所述，有$\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2=\int f(x_1)dx_1$。

故得证。

结论13　设$f[g(x_2)]=g'(x_2)$有原函数，如果$x_1=g(x_2)$在x_2的某一个区间上是单调且可导的，并且要满足$g(x_2)$的导数$g'(x_2)\neq 0$。

则有：$\int f(x_1)dx_1=\int f[g(x_2)]g'(x_2)dx_2$。

结论14　设函数$f(x)$和$g(x)$都是具有连续导数的函数。则有：

$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$

证明：因为函数$f(x)$和$g(x)$都是具有连续导数的函数。

所以根据导数的乘法法则，则有

$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

移项后则有：

$f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x)$

两边求不定积分后就有：

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

经整理则有：

$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$

故得证。

第四部分　三角函数常见公式

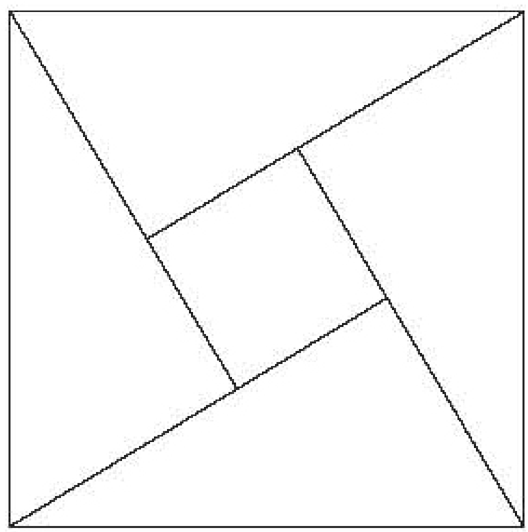
定理　勾股定理(即“毕达哥拉斯定理”)

如图附录2-1所示，这像风车一样的图案叫做玄图。其中的四个直角三角形是完全相等的。规定每个直角三角形较短的直角边的长度为a，另一直角边的长度为b，每条斜边的长度为c。那么通过观察，你认为a、b、c之间有什么数量关系？

首先，里面的小正方形的边长应该是“股”减去“勾”的值，可以记为b-a，那么其面积就是$(b-a)_2$。另外四个直角三角形的面积都是“勾”乘“股”除以2，可以记为

$$\frac{ab}{2}$$

那么四个这样的三角形的面积为2ab。而大正方形的面积既可以表示为“弦”的平方，即c_2，也可以表示为$(b-a)_2+2ab$。所以就有$c_2=(b-a)_2+2ab$，整理后就可以得到$a_2+b_2=c_2$。



图附录2-1

公式1　sin-cos公式

sin-cos公式：$\sin_2\theta+\cos_2\theta=1$

证明：

$$
\begin{aligned}
左边 &= \sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&= \left(\frac{对边}{斜边}\right)^2 + \left(\frac{邻边}{斜边}\right)^2 \\
&= \frac{对边^2}{斜边^2} + \frac{邻边^2}{斜边^2} \\
&= \frac{对边^2 + 邻边^2}{斜边^2} \\
&= \frac{斜边^2}{斜边^2}（此处需要使用勾股定理） \\
&= 1
\end{aligned}
$$

综上所述，左边＝右边。

故得证。

公式2　sec-tan公式(根据发音，有的学者称其为“三肯公式”)

sec-tan公式：$\sec_2\theta-1=\tan_2\theta$

证明：

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \sec^2\theta - 1 \\
&= \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta - \cos^2\theta \\
&= \frac{1 - \sin^2\theta\cos^2\theta - \cos^4\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta - \cos^4\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \tan^2\theta + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta - \cos^4\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \tan^2\theta + (1 - \sin^2\theta - \cos^2\theta) \\
&= \tan^2\theta + (\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta) \\
&= \tan^2\theta
\end{aligned}
$$

综上所述，左边＝右边。

故得证。

sec-tan公式的推导形式有：

$\tan_2\theta + 1 = \sec_2\theta$ 。

该式也很常用。

附录3　积分表

第一部分　基本积分表

(1) ∫kdx＝kx+C　(k是常数)

$$(2)\ \int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$(3)\ \int x^{-1} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$(4)\ \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$(5)\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

(6) ∫cosxdx＝sinx+C

(7) ∫sinxdx＝-cosx+C

$$(8)\ \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$(9)\ \int \csc^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e_x dx = e_x + C$

$$(13)\ \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

第二部分　有理函数积分表

(14) $\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

(15) $\int (ax+b)^{-1} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

(16) $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|) + C$

(17) $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}[\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|] + C$

(18) $\int \frac{1}{x(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

(19) $\int \frac{1}{x^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

(20) $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$

(21) $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right) + C$

(22) $\int \frac{1}{x(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

(23) $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(24) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(25) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} +$

$$\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\mathrm{d}x$$

(26) $\int\frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x+C \qquad (a>0,\ b>0)$

(27) $\int\frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}\,x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}\,x+\sqrt{-b}}\right|+C \qquad (a>0,\ b<0)$

(28) $\int\frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C \qquad (a>0)$

(29) $\int\frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\int\frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x \qquad (a>0)$

(30) $\int\frac{1}{x(ax^2+b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|}+C \qquad (a>0)$

(31) $\int\frac{1}{x^2(ax^2+b)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{bx}-\frac{a}{b}\int\frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x \qquad (a>0)$

(32) $\int\frac{1}{x^3(ax^2+b)}\mathrm{d}x=\frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2}-\frac{1}{2bx^2}+C \qquad (a>0)$

(33) $\int\frac{1}{(ax^2+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2b(ax^2+b)}+\frac{1}{2b}\int\frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x \qquad (a>0)$

(34) $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$

$(a>0,\ b^2<4ac)$

(35) $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$

$(a>0,\ b^2>4ac)$

(36) $\int\frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-\frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$

$(a>0)$

第三部分　无理函数积分表之一

(37) $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

(38) $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

(39) $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

(40) $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

(41) $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

(42) $\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C \qquad (b>0)$

(43) $\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C \qquad (b<0)$

(44) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax+b}}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx$

(45) $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b}+b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx$

(46) $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx$

(47) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+$

$\sqrt{|x-b|})+C$

(48) $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$

$$(49)\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$$

$$(50)\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$$

第四部分　无理函数积分表之二（a＞0）[注101]

(51) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(52) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

(53) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+a^2}+C$

(54) $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$

(55) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(56) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

(57) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(58) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

(59) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(60) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

(61) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$

(62) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(63) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

(64) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

(65) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{|x|}arch\,\frac{|x|}{a}+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

(66) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

(67) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}+C$

(68) $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

(69) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

(70) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

(71) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

(72) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

(73) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(74) $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx$

$= \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(75) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + C$

(76) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$= \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(77) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|} + C$

(78) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(79) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(80) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

(81) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

(82) $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

(83) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(84) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

(85) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

(86) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

(87) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(88) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$

(89) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

(90) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(91) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

(92) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

(93) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

(94) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}$

$\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

(95) $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

(96) $\int \frac{1}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

(97) $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

(98) $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

第五部分　三角函数积分表

(99) ∫sinxdx=-cosx+C

(100) ∫cosxdx=sinx+C

(101) ∫tanxdx=-ln|cosx|+C

(102) ∫cotxdx=ln|sinx|+C

(103) $\int \sec x\,\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(104) $\int \csc x\,\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$

(105) ∫sec$_2$xdx=tanx+C

(106) ∫csc$_2$xdx=-cotx+C

(107) ∫secxtanxdx=secx+C

(108) ∫cscxcotxdx=-cscx+C

$$(109)\ \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$(110)\ \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$(111)\ \int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$(112)\ \int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$(113)\ \int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\mathrm{d}x$$

$$(114)\ \int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\mathrm{d}x$$

$$(115)\ \int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$(116)\ \int \sin ax\cos bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$$

$$(117)\ \int \sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$$

$$(118)\ \int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$$

$$(119)\ \int \frac{1}{a+b\sin x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \qquad (a^2>b^2)$$

$$(120)\ \int \frac{1}{a+b\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C$$

(121) $\int \frac{1}{a+b\cos x}\mathrm{d}x = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$

$(a^2>b^2)$

(122) $\int \frac{1}{a+b\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right|+C$

$(a^2<b^2)$

(123) $\int \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+C$

(124) $\int \frac{1}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right|+C$

(125) $\int x\sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{1}{a}x\cos ax+C$

(126) $\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^2\cos ax+\frac{2}{a^2}x\sin ax+\frac{2}{a^3}\cos ax+C$

(127) $\int x\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{1}{a}x\sin ax+C$

(128) $\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax+\frac{2}{a^2}x\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+C$

第六部分　反三角函数积分表(a＞0)

(129) $\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(130) $\int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(131) $\int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(132) $\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(133) $\int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(134) $\int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(135) $\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$

(136) $\int x \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(a^2 + x^2) \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} x + C$

(137) $\int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{6} x^2 + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C$

第七部分　指数函数积分表

(138) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

(139) $\int \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} + C$

(140) $\int x \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} (ax - 1) \mathrm{e}^{ax} + C$

(141) $\int x^n \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x$

(142) $\int x a^x \mathrm{d}x = \frac{x}{\ln a} a^x - \frac{1}{(\ln a)^2} a^x + C$

(143) $\int x^n a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} x^n a^x - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x \mathrm{d}x$

(144) $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2} \mathrm{e}^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$

(145) $\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2} \mathrm{e}^{ax} (b \sin bx + a \cos bx) + C$

$$(146)\ \int e^{ax}\sin^n bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)+$$

$$\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$$

$$(147)\ \int e^{ax}\cos^n bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)+$$

$$\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$$

第八部分　对数函数积分表

(148) $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

$$(149)\ \int \frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$$

$$(150)\ \int x^n\ln x\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$$

(151) $\int (\ln x)_n dx = x(\ln x)_n - n\int (\ln x)_{n-1} dx$

$$(152)\ \int x^m(\ln x)^n dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$$

第九部分　双曲函数积分表

(153) $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C$

(154) $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C$

(155) $\int \mathrm{th}x dx = \ln \mathrm{ch}x + C$

$$(156)\ \int sh^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} sh\,2x + C$$

$$(157)\ \int ch^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} sh\,2x + C$$

第十部分　不定积分的一般公式

(158) $\int f(x) \pm g[(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(159) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad (c \neq 0)$

(160) $\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx$

(161) $x = g(y)$，$y = g_{(-1)}(x)$ $\int f(x)dx = \int f[g(y)]g'(y)dy$

第十一部分　反函数积分

这里用$x = f_{(-1)}(y)$表示$y = f(x)$的反函数

(162) $\int f_{(-1)}(y)dy = yf_{(-1)}(y) - \int f(x)dx$

(163) $\int f_{(-1)}(y)g(y)dy = f_{(-1)}(y)G(y) - \int G[f(x)]dx$

(164) $\int H[f_{(-1)}(y)]g(y)dy = H[f_{(-1)}(y)]G(y) - \int h(x)G[f(x)]dx$

$$(165)\ \int F_1[y, f_{(-1)}(y)]\,dy = F[y, f_{(-1)}(y)] - \int F_2[f(x), x]\,dx$$

$$\left(F_1(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} F(x_1, x_2)\right)$$

附录4　多元函数的微积分简介

在第1章中我们就讨论过多元函数，对于一元函数来说，有导数(求导)、微分、积分、泰勒展开等概念。实际上对于多元函数来说也有这些概念，只不过由于多元函数的自变量不止有一个(两个或以上)，所以多元函数中(多个)自变量和(一个)因变量之间的关系往往要比一元函数中复杂得多。这里我们对多元函数的微积分进行简单的介绍，如果想要深入了解多元函数的微积分，请查阅同济大学数学系编写的《高等数学(下册)》一书。

二元及以上的函数统称为多元函数。对于二元函数来说，它的定义域通常是由平面上的一条或几条光滑曲线所围成的平面区域，围成区域的曲线称为区域的边界，包括边界在内的区域称为闭区域，否则为开区域。和一元函数一样，多元函数也有定义域、值域、自变量、因变量等概念和性质。

在讨论一元函数时，我们介绍过导数的概念，现在我们就以二元函数f(x，y)为例来解释偏导数(多元函数的导数)。我们假设只有自变量x变化，而另一自变量y不变化，这样多元函数就可以被看成对一元函数求导了。一元函数y＝f(x)的导数可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

，而二元函数z＝f(x，y)的x的偏导数则要表示为

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

，z＝f(x，y)的y的偏导数则要表示为

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

。

对于一元函数y＝f(x)的二阶导数要表示为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

，而对于二元函数来说，二阶导数则有四个，分别是：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}、\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}、\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}、\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

在第4章中我们介绍过一元函数的泰勒展开。泰勒展开是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。如果函数足够平滑的话，在已知函数在某一点的各阶导数值的情况下，泰勒展开可以用这些导数值做系数构建一个多项式来计算函数在这一点的邻域中的值。此外，泰勒展开还给出了这个多项式和实际的函数值之间的偏差。对于多元函数也有泰勒展开的概念，多元函数必须要考虑用多个变量的多项式来近似表达一个多元函数。

这里不再对多元函数的泰勒展开做额外的介绍。

想要了解多元函数的微积分，可以查阅《多元函数》《高等数学(下册)》等书。《多元函数》是美国作者弗莱明编写的一本权威的关于多元函数的教科书，在此特别推荐给各位想深入学习的读者。

参考文献

[1]梁宗巨.数学家传略辞典.山东：山东教育出版社.1989.

[2]邹凤梧，刘中柱，周怀春.积分表汇编.北京：宇航出版社.1992.

[3]William Oughtred. MacTutor History of Mathematics archive. 1996.

[4]乌云其其格.《科学技术与辩证法》1996年第02期.1996.

[5]同济大学数学系.高等数学(第六版).北京：高等教育出版社.2007.

[6]姜启源，谢金星，叶俊.数学模型(第四版).北京：高等教育出版社.2011.

[7]韩雪涛布莱尼兹二进制.豆丁网.2012.

[8]探访莱布尼茨：与大师穿越时空的碰撞.果壳.2013.

[9]《周易》简介.中国中央电视台.2014.

注1：也有单元函数的叫法。

注2：因为这里的多元函数只有两个自变量，也可以叫二元函数。

注3：也有“笔集包含铅笔集”和“铅笔集包含于笔集”这两种说法。

注4：本书所使用的符号体系请参考附录1。

注5：在概率学和其他一些学科中也被称为“积”。

注6：在概率学和其他一些学科中也被称为“和”。

注7：也有“余集”的说法。

注8：德摩根律也称对偶律。

注9：老子姓李名耳，字聃，一字或曰谥伯阳。华夏族，楚国苦县厉乡曲仁里人，约生活于前571年至471年。他是我国古代伟大的哲学家和思想家、道家学派创始人，被唐朝帝王追认为李姓始祖。老子乃世界文化名人，世界百位历史名人之一，存世有《道德经》又称《老子》，其作品的精华是朴素的辩证法，主张无为而治，对中国哲学发展具有深刻影响。在道教中，老子被尊为“道教始祖”。老子与后世的庄子并称“老庄”。

注10：也有用x轴，y轴代替横轴和纵轴的。

注11：这里的x是指以小时为单位的时间，若以分钟为单位则应将其化为

注12：在数学上如果两个值的差趋近于0，我们就认为它们是非常接近的。所以也可表示为一个数(变量)趋近于另一个数(变量)的形式。

注13：戈特弗里德·威廉·莱布尼茨(1646年7月1日至1716年11月14日)。德意志哲学家、数学家。历史上少见的通才。被誉为十七世纪的亚里士多德。在数学上，他和牛顿先后独立发明了微积分，而且他所使用的微积分符号被广泛使用，并保留至今。此外莱布尼茨收到中国《易经》的影响，对二进制的发展做出了贡献，并有代表作《论中国人的自然神学》。

注14：也有线对称的叫法。

注15：正方形和长方形统称矩形。

注16：菱形是一种特殊的平行四边形，它的四条边均相等。而一般的平行四边形只有对边相等。

注17：在某些面向中小学生的教材中，约定数列中的项只能是正整数。但这一约定在高等数学和微积分领域并不适用。在高等数学(包括但不仅限于微积分)领域中，数列的概念是指：如果按照某一法则，对每个n∈N[sub]*[/sub]，对应着一个确定的实数x[sub]n[/sub]按照下标n从小到大排列得到的一个序列。有的书籍的符号体系中，数列用{x[sub]n[/sub]}来表示。

注18：n!表示1×2×3×…×n。

注19：规定0!＝1。

注20：约翰·纳皮尔是苏格兰数学家、神学家，对数的发明者。

注21：威廉·奥特雷德是英国数学家，他对数学符号的发展有着很大的影响。他生于白金汉郡，卒于萨里。他毕业于剑桥大学国王学院，1628年受聘为家庭教师。1631年出版了《数学之钥》，1680年成为艾尔伯里教区的教区长。奥特雷德的研究在欧洲产生了很大的影响，牛顿曾经给予其很高的评价。

注22：这里无穷小是可以比较大小的。数学中也存在只能比较是否相等而不能比较大小关系的情况，如虚数。由于本书主要是介绍微积分，所以在这里不做赘述。

注23：在弧度制中90°被表示为

注24：这里需要有一定关于三角函数计算的相关经验。

注25：米山国藏，日本著名数学教育家，学者.著有《数学的精神、思想和方法》。

注26：约瑟夫·路易斯·拉格朗日，法国著名数学家、物理学家。1736年1月25日生于意大利都灵，1813年4月10日卒于法国巴黎。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。最主要的成就是拉格朗日中值定理。

注27：《易经》是《三易》之一。汉初刘向校书时《三易》仍存，汉后下落不明。《易经》是传统经典之一，相传系周文王姬昌所作，包括《经》和《传》两个部分。《经》主要是六十四卦和三百八十四爻，卦和爻各有说明(卦辞、爻辞)，作为占卜之用。《周易》没有提出阴阳与太极等概念，讲阴阳与太极的是被道家与阴阳家所影响的《易传》。《传》包含解释卦辞和爻辞的七种文辞共十篇，统称《十翼》。

注28：二进制是计算技术中广泛采用的一种数制。二进制数据是用0和1两个数码来表示的数。它的基数为2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”。当前的计算机系统使用的基本上是二进制系统，数据在计算机中主要是以补码的形式存储的。

注29：多元函数求导称作求偏导数，求偏导数时英文字母d要换成希腊字母□表示偏导。本书少有涉及这部分内容，在这里不做过多的赘述。不过为了给读者后续学习提供便利，可以暂时认为求偏导数是对所偏的自变量求导，其他自变量按常数处理。

注30：进化论是指生物生存规律和发展方向的理论，和神创论等观点对立。

注31：数学模型的历史可以追溯到人类开始使用数字的时代。随着对数字的广泛使用，人类不断地建立各种各样的数学模型，用以解决层出不穷的实际问题。建立数学模型是联系实际问题与数学工具的桥梁。

注32：孟德尔，1822年7月20日至1884年1月6日，遗传学的奠基人，被誉为“现代遗传学之父”。他通过豌豆实验，发现了遗传学三大基本规律中的两个，分别为分离规律及自由组合规律。1840年，孟德尔考入奥尔米茨大学哲学院，主攻古典哲学，还学习数学。1843年大学毕业以后，21岁的孟德尔进入布隆城奥古斯汀修道院，在当地教会办的一所中学教授自然科学。他于1865年发现遗传定律。

注33：孟德尔所说的遗传因子是人类对生物学缺乏系统的认识时的说法，现代生物学理论中的遗传因子是指基因。

注34：该说法引自高等教育出版社出版的《数学模型(第四版)》一书，原文是：“一方面，数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实；另一方面，只有当数学建模的结论经受住现实对象的检验时，才可以用来指导实际，完成实践—理论—实践这一循环。”

注35：克罗狄斯·托勒密，古希腊天文学家、地理学家、占星学家和光学家。图3-3是他的画像。

注36：尽管托勒密把地球当作宇宙中心的观点在今天看来是可笑的，然而地心说却是世界上第一个成熟的行星体系模型。从地心说开始，地球是近似球形的天体，而不是一个平面的观点被越来越多的人接受，此外，地心说明确了行星和恒星的区别，并且标志着人类开始系统地认识宇宙和天体的运行规律。

注37：托马斯·阿尔瓦·爱迪生(1847年2月11日至1931年10月18日)，出生于美国俄亥俄州米兰镇，逝世于美国新泽西州西奥兰治。他是发明家、企

业家，是人类历史上第一个利用大量生产原则和电气工程研究的实验室来从事发明研究，进而对世界产生重大深远影响的人。

注38：是否为线性模型是模型的一种基本关系。第10章我们将讨论的微分方程，就要考虑其是否为线性微分方程。在此，读者只需要知道这是一种数学模型的基本关系即可。

注39：物理学和数学中把重量称作质量，但是这里为了避免和前文中的“酵母的质量”产生混淆所以用重量一词代替质量。

注40：ρ代表密度，表示质量与体积的比，也有的教科书中称其为单位体积能的质量。实际上面团的密度并不是一个确定的值，但是我们要对模型进行简化，所以姑且认为它是一个确定的值。

注41：系数一般是指变量或字母前的常数，这里是指

注42：这里说的“近似半径”是因为面团是近似圆球形的缘故。

注43：由于某些读者习惯的符号体系中没有sec、csc、cot等符号，所以特别说明：

注44：这里为了方便书写，用x表示因变量，而y表示的则是自变量。这说明用于表示自变量和因变量的字母和符号可以被替换。但是习惯上，我们一般都用y表示因变量，x表示自变量。这只是一种习惯，当使用的符号不符合这种习惯时，我们也需要理解、适应。

注45：更科学的说法是区间，但是这里由于没有介绍区间的概念，所以使用了此种说法。

注46：这里是指函数的单调性，读者可以理解为函数值(因变量)随着自变量的增加只增加或者只下降的情况。

注47：约翰·罗杰斯·希尔勒(1932年7月31日至今)，美国哲学教授。他主要研究语言的“目的性”。“中文房间悖论”就是由他提出的。

注48：关孝和的出生年份无从考究，这里是指1642年前后。

注49：和算：日本江户时代发展起来的一种数学。其成就包括一些很优秀的行列式和微积分的成果。

注50：《自然哲学的数学原理》是英国伟大的科学家艾萨克·牛顿的代表作。成书于1687年。它是第一次科学革命的集大成之作，它在物理学、数学、天文学和哲学等领域产生了巨大影响。在写作方式上，牛顿遵循古希腊的公理化模式，从定义、定律(即公理)出发，导出命题；对具体的问题(如月球的运动)，他把从理论导出的结果和观察结果相比较。

注51：当时叫分析学。

注52：莱昂哈德·欧拉(1707年4月15日至1783年9月18日)，瑞士数学家、自然科学家。他出生于瑞士的巴塞尔，1783年于俄国圣彼得堡去世。欧拉是十八世纪数学界最杰出的人物之一，他不但为数学界作出贡献，更把数学推至物理的领域。他是数学史上最高产的数学家，其代表作《无穷小分析引论》《微分学原理》《积分学原理》都成为了数学界中的经典著作。

注53：实际上这是一种不够严谨的说法，但是暂时这样说方便大家理解。

注54：这是一种常见的极端情况，可能是给定点不在定义域内或者不在函数图像上。

注55：切线不唯一就意味着没有切线，所以某些教科书上说切线不存在也是对的。

注56：后文中用f(x)指代这一函数。

注57：两点竖直排列的话，导数不存在。前文中已有详细的解释，这里不再重复介绍。

注58：伽利略(1564年2月15日至1642年1月8日)，意大利数学家、物理学家、天文学家。他发明了摆针和温度计。另外，伽利略还是近代实验科学的奠基人之一。

注59：亚里士多德(公元前384年至公元前322年)，古希腊人，伟大的哲学家、科学家和教育家之一，是希腊哲学的集大成者。其研究涉及伦理学、心理学、经济学、神学、政治学、修辞学、自然科学、教育学、诗歌、风俗，以及雅典法律，代表作有《工具论》、《物理学》、《形而上学》等。

注60：详见第3章。

注61：这一错误观点是指亚里士多德在公元前三世纪提出的：力是维持物体运动的原因。这一观点被伽利略的理想斜面实验推翻。

注62：也叫牛顿第一定律。

注63：也叫泰勒公式。

注64：对某一变量求导时，其他变量应该被理解为常数。在这里是对时间求导，非时间的变量都应该被理解为常数。

注65：某些初中教程中没有介绍加速度这一概念，但是介绍过重力常数g，实际上重力常数g应该被称为重力加速度，被认为是加速度的一种。

注66：逆向推理的原理将在第6章介绍，这里读者暂时只需要推理即可。

注67：图4-6和图4-7的区别是纵轴表示的变量不同，已在图中标出。

注68：洛必达是著名的法国数学家。1661年生于法国的贵族家庭，1704年2月2日卒于巴黎。洛必达在早年就显露出数学才能，他在15岁时就解出帕斯卡的摆线难题，后又解出约翰·伯努利向欧洲挑战的“最速降曲线问题”。在这之后，洛必达在瑞士数学家伯努利的门下学习微积分，并成为法国新解析的主要成员。

注69：“不服”实际上是指“不符合”的意思。有的学者称其为

注70：ξ在x与a之间。

注71：指这本书讨论的范畴之内。

注72：有的书中称原函数为直接函数。

注73：狄利克雷，德国数学家。对数论、数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一。1805年2月13日在迪伦出生，1859年5月5日在格丁根去世。他从1839年开始任柏林大学教授，1855年接任高斯在格丁根大学的教授职位。他曾先后在布雷斯劳大学、柏林军事学院和柏林大学任教27年，对德国数学发展产生巨大影响。

注74：狄利克雷函数是一个定义在实数范围上、值域不连续的函数，同时它又是一个偶函数。它处处不连续，处处极限不存在，不可积分。有人认为它的图像是不存在的，这是极其错误的说法，理论上在目前研究的范围内，每一个函数式都有图像与之对应，只不过在现阶段无法为狄利克雷函数绘制出精确的图像。在数学上，有没有图像和能不能画出图像是两个不同的概念，难以画出精确图像的函数其图像并不一定不存在。

注75：即平面直角坐标系。

注76：八种常用方法是指：点斜式、截距式、两点式、一般式、斜截式、法线式、点向式和法向式。

注77：应该称为截距，因为距离只能是非负数(正数和零)。交点在纵轴的上半轴(正半轴)时，截距是交点到原点的距离；而当交点在纵轴的下半轴(负半轴)时，截距则是交点到原点的距离的相反数。

注78：股市中的涨停和跌停和函数中的驻点的概念不完全一样，这里只是借涨停和跌停的概念来引入驻点的概念，并不代表股市中的涨停和跌停一定对应函数中的驻点。

注79：大致的解析式并不是指解析式不够精确，而是由于桥洞的高矮和宽度都是需要经过实地测量再作出决定的。所以这里我们把需要测量后决定的数据都表示为字母的形式，这一章我们会给出一种可供参考的桥洞设计的模型。

注80：读者可以观察图6-1，也可以观察现实生活中的石拱桥。

注81：实际上是指以一次函数的形式减小。

注82：本书中不讨论重积分的情况。

注83：即数学表达式。

注84：这里实际上是指导函数，在本书中对导数和导函数的概念不做特别区分。

注85：这里是因为我们使用的求不定积分的符号体系是使用的莱布尼茨的符号体系，只有把导数和积分的符号体系统一为莱布尼茨的符号体系，不定积分的相关问题才能被解释得通。

注86：运算优先级是指运算的先后顺序的级别。加减法较乘除法来说就是运算优先级较低的运算。相应地，乘除法较乘方和开方的运算来说也是运

算优先级较低的运算。∫是比加减法的运算优先级高，而比乘除法的运算优先级要低的运算。

注87：Summation的意思为和、总和、合计。

注88：在第2章中有“Δx表示x-x[sub]0[/sub]”，Δx是横向的差的意思。

注89：牛顿既是数学家，又是物理学家。

注90：实际上不可能没有积分下限，这种没有积分下限的情况就是不严谨的只是想象。

注91：这个点实际上就是A点的横坐标。

注92：在接触分数和无理数之前，我们还有“数格子”的求面积方法。由于该方法主要出现在小学低年级教材中，所以我们只介绍把矩形看成扩大的单位面积的求面积方法，而不再对数格子的方法进行详细介绍。

注93：两个图形形状相同、面积相等则叫做全等。

注94：实际上是h-0，由于h-0＝h，所以省略不写。

注95：这里为了方便省略了

注96：彼得·拉克斯，匈牙利裔美国数学家。他在19岁时就参与了“曼哈顿计划”。他在79岁时获得阿贝尔奖。

注97：波恩哈德·黎曼(1826年9月17日至1866年7月20日)，德国数学家、物理学家，对数学分析和微分几何做出了重要贡献。他的研究为广义相对

论的发展铺平了道路。

注98：约翰尼斯·开普勒(1571—1630)。德国天文学家、物理学家、数学家。他生于符腾堡的威尔德斯达特镇，卒于雷根斯堡。开普勒发现了行星运动的三大定律，分别是轨道定律、面积定律和周期定律。

注99：当该药物在血液中的浓度达到100微克/毫升时，会出现严重中毒现象。

注100：有学者认为结论12中提到的换元法应该分为第一类换元法和第二类换元法。第一类换元积分法叫做凑微分法，用于计算两个式子相乘的形式，被认为是复合函数求导的逆运算。而其他类的换元法则可归于第二类换元法。在学术界，这种分类方法也存在着较大的争议，其主要争议就是第一类换元法和第二类换元法没有明确的界限。结论12证明的是第一类换元法，结论13虽然是结论12的变换形式，但是它实际上是第二类换元法。在目前的高数领域，普遍认为应当区分第一类换元法和第二类换元法。

注101：此部分中的所有a满足a＞0，需要特别注意。

Table of Contents